CONCEPTUALISATION EN MATHEMATIQUES ET ELEVES EN DIFFICULTE

LE CALCUL MENTAL, ENTRE SENS ET TECHNIQUE

Denis Butlen
Monique Charles-Pézard
IUFM de Créteil, Université Paris 12
Équipe DIDIREM, Université Paris 7-Denis Diderot

Nous présentons dans cet article un ensemble de résultats concernant le processus de conceptualisation[1] de certaines notions mathématiques. Il s'agit d'une réorganisation de résultats de recherches précédentes portant sur l'enseignement de techniques de calcul mental en lien avec la résolution de problèmes. Nous mettons en évidence différents cheminements cognitifs d'élèves selon les difficultés qu'ils rencontrent en mathématiques. Il s'agit d'un travail de synthèse portant sur le processus de conceptualisation en prenant comme filtre les élèves en difficulté en mathématiques, élèves de plus issus de milieux socialement défavorisés (ZEP).
Dans une première partie intitulée *Calcul mental : le paradoxe de l'automatisme*, nous rappelons les résultats d'un diagnostic portant sur les performances et procédures des élèves lors de calculs mentaux de sommes, différences et produits, révélés par une recherche déjà ancienne (Butlen, Pézard, 1992).
Nous énonçons un paradoxe, source de difficulté pour les élèves, entre adaptabilité et automatisme. Nous décrivons ensuite un ensemble d'activités susceptibles d'aider au dépassement de ce paradoxe. Ces activités ont pour but de mettre en place des techniques de calcul mental qui serviront d'outil pour en construire d'autres plus élaborées et pouvant s'adapter en fonction des nombres intervenant dans le calcul. Nous concluons cette première partie en montrant comment les élèves en difficulté peinent à en bénéficier autant que leurs pairs.
Cela nous amène, dans une seconde partie intitulée *conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté*, à envisager de nouveaux dispositifs susceptibles de repousser ces limites et à expliciter des cheminements cognitifs spécifiques de certains élèves en difficulté, scolarisés en ZEP. Nous mettons en évidence des étapes dans le processus de conceptualisation favorisant les apprentissages de ces élèves.

[1] Processus de conceptualisation : processus d'appropriation d'un ou de plusieurs concepts. Nous renvoyons le lecteur aux travaux de psychologie cognitive et de didactique des mathématiques, notamment à ceux de G. Vergnaud, pour des définitions de concept, conceptualisation, champ conceptuel.

En conclusion, nous présentons quelques éléments d'explication permettant d'optimiser ces premiers résultats.

Calcul mental, le paradoxe de l'automatisme

Précisons ce que nous entendons par « automatisme » et « procédure automatisée ».
Une procédure est *automatisée* quand elle est restituée par l'élève pour résoudre un calcul sans que celui-ci la reconstruise (Fischer 1987, Boule 1997). Nous disposons, grâce notamment aux travaux des psychologues, de différents outils pour la reconnaître. On peut ainsi avoir accès directement à cette caractéristique en mesurant par exemple le temps de réponse de l'élève ou indirectement en questionnant l'élève sur sa manière de calculer. Cette seconde approche, souvent utilisée en didactique des mathématiques, est plus délicate à mettre en œuvre car elle relève essentiellement du déclaratif.
Par *automatisme*, nous entendons, selon le contexte, soit le recours à un ensemble de procédures automatisées installées en mémoire et ayant fait l'objet d'un enseignement ou d'une pratique préalable, soit un comportement se caractérisant par une mobilisation quasi systématique de l'élève d'un seul type de procédure quelles que soient les données numériques du calcul à effectuer.
Nous pouvons définir un élève en difficulté en mathématiques de deux manières différentes. La première définition est plutôt statistique : un élève est diagnostiqué comme en difficulté à un niveau donné de la scolarité quand il échoue de manière importante voire systématique aux items d'une évaluation réussis par au moins 80% de ses pairs. Nous faisons ici référence soit à des évaluations construites et testées sur un échantillon représentatif d'une population scolaire (par exemple les évaluations EVAMATHS de l'APMEP ou celles que nous avons nous-même élaborées lors des recherches citées), soit aux évaluations nationales du Ministère de l'Education Nationale. La seconde définition renvoie à un ensemble de caractéristiques susceptibles d'être présentées par un élève en difficulté (Butlen 1997).

Un diagnostic des procédures et performances des élèves en calcul mental

Des résultats concernant les procédures des élèves

Il s'agit d'une recherche déjà ancienne (Butlen, Pézard, 1992). Nous avons travaillé pendant deux ans dans plusieurs classes de l'école élémentaire du CP au CM2 afin de recueillir les procédures des élèves lors d'activités de calcul mental portant notamment sur des sommes, des différences, des produits et des quotients. L'analyse du corpus de données nous a permis d'élaborer une typologie des procédures mobilisées du CP au CM2 et d'évaluer leur disponibilité[2].
Nous avons constaté que les élèves, lors de calculs mentaux, mobilisaient surtout des procédures de calcul automatisées ou des algorithmes écrits. Tout se passe comme si l'enseignement de techniques[3] opératoires écrites ou de techniques de calcul mental standard et automatisées rentrait en conflit avec le recours à des procédures de calcul plus primitives mobilisées précédemment par les élèves.

---

[2] Une procédure est *disponible* quand elle est mobilisée lors d'un calcul sans appel explicite de la part de l'enseignant, notamment dans le cas où elle constitue un des éléments de la stratégie de calcul mise en œuvre par l'élève pour réaliser la tâche demandée.

[3] Nous entendons par *technique* un ensemble organisé de procédures. Nous renvoyons à Fayol et Monteil (1994) ainsi qu'à Boule (1997) pour une synthèse bibliographique des définitions des termes procédure, algorithme, technique, stratégie etc.

Donnons un exemple. Pour calculer 45 + 17, les procédures possibles sont les suivantes :

- simulation mentale de l'algorithme écrit ;
- utilisation de la décomposition additive canonique de l'un ou des deux termes :
  45 + 17 = 40 + 5 + 10 + 7 = 50 + 12 = 62
  45 + 17 = 45 + 10 +7 = 55 + 7 = 62 ;
- utilisation d'une décomposition additive de l'un des termes s'appuyant sur un passage à une dizaine supérieure :
  45 + 17 = 45 + 5 + 12 ou 45 + 15 + 2 ou 2 + 43 + 17 ;
- utilisation d'une décomposition soustractive de l'un des termes :
  45 + 20 – 3, etc.

Les procédures mobilisées par des élèves de fin de cycle 2 n'ayant pas bénéficié d'un enseignement préalable sont les suivantes : l'algorithme « posé dans la tête » (procédure majoritaire), les différentes procédures mobilisant des décompositions canoniques et beaucoup plus rarement celles mobilisant d'autres décompositions additives ou soustractives. Ces dernières nécessitent un enseignement préalable.
Les élèves préfèrent utiliser des procédures sûres (qui fonctionnent dans tous les cas et conduisent, à condition d'être menées à terme, au résultat attendu) mais coûteuses plutôt que des procédures mieux adaptées au calcul en jeu. Ces dernières nécessitent une prise en compte de la spécificité des nombres intervenant dans le calcul et de leurs propriétés. De plus, leur domaine de validité est limité.

Parallèlement à ce constat, nous avons retrouvé un résultat déjà signalé par d'autres chercheurs (Fischer, 1987-1988, Resnick, 1983) : les élèves de fin de cycle 2 éprouvent de réelles difficultés à effectuer des calculs simples mais nécessitant un passage à la dizaine comme : 45 + 7 = 52. Ce constat révèle un défaut de procédures automatisées pouvant s'expliquer en partie par un manque de pratique.

Nous constatons donc à la fois un défaut d'adaptabilité des élèves et un manque de faits numériques mémorisés. Ces derniers ne sont pas suffisamment disponibles lors des calculs. De plus, la mise en place de techniques de calcul automatisées (notamment les algorithmes écrits) semble limiter les possibilités d'adaptation des élèves au calcul du moment, notamment quand l'enseignement ne le prend pas suffisamment en compte.

Des résultats concernant les élèves en difficulté

Le précédent diagnostic montre aussi que les élèves en difficulté en mathématiques le sont en général en calcul mental. De plus, pour ces élèves, on constate un décalage dans le temps de l'apprentissage : c'est le cas notamment dans la mobilisation progressive de procédures adaptées aux calculs proposés.
Cela nous conduit à énoncer un paradoxe lié aux rapports qu'entretiennent automatisme et adaptabilité aux calculs.

Le paradoxe de l'automatisme

Ces différentes recherches sur le calcul mental montrent à la fois un défaut d'adaptation dû à l'installation de procédures automatisées mais aussi un défaut de performances dû à un manque de procédures de calcul automatisées. Ces manques révèlent, selon nous, une connaissance insuffisante des nombres, des opérations et de leurs propriétés. Tous les élèves sont ici concernés, mais ces manques sont particulièrement criants pour les élèves en difficulté. Ils concernent par exemple la connaissance et la disponibilité des compléments à dix, à la dizaine ou à la centaine supérieure.

Tout se passe comme si l'apprentissage et la maîtrise de techniques de calcul sûres (les techniques opératoires écrites ou encore les techniques mobilisant des décompositions additives canoniques décrites ci-dessus) se faisaient au détriment des autres procédures, voire les « écrasaient ». Les élèves semblent alors trouver plus économique de mobiliser ces procédures alors que d'autres, nécessitant une prise en compte très rapide des propriétés particulières des nombres intervenant dans le calcul, s'avèreraient plus efficaces et moins coûteuses en mémoire comme en quantité de calcul intermédiaires.

Cette prise en compte insuffisante peut s'expliquer par une familiarisation trop faible avec les propriétés spécifiques de ces nombres mais aussi par l'absence de procédures automatisées de traitement associées. En effet, l'élève ne pourra mobiliser rapidement la décomposition 17 = 20 – 3 (ou 17 = 5 + 12) dans le calcul 45 + 17 que si celle-ci est disponible. Cela nécessite un entraînement spécifique. L'élève doit non seulement avoir appris à décomposer ces nombres, mais ces décompositions doivent avoir été automatisées. La connaissance et la maîtrise d'un nombre insuffisant de procédures automatisées peuvent donc conduire l'élève à adopter en calcul un comportement automatisé. Pour dépasser ce comportement, il est nécessaire d'enrichir le panel des procédures automatisées.

Nous pouvons résumer ainsi le paradoxe de l'automatisme : trop peu d'automatismes (au sens de trop peu de procédures automatisées) peut renforcer l'automatisme (au sens du comportement automatisé) ; davantage d'automatismes peut permettre d'échapper à l'automatisme.

Une première tentative pour dépasser ce paradoxe consiste donc en la mise en place progressive de procédures élémentaires automatisées de calcul. Il s'agit d'accroître les performances des élèves en enrichissant leurs connaissances numériques, en installant de nouveaux faits numériques avec une pratique régulière du calcul mental. Cela devrait les amener à restituer des faits mémorisés sans avoir à les reconstruire à chaque fois.
Ces procédures élémentaires de calcul jouent ensuite le rôle de modules de calcul intégrés dans des procédures plus riches et adaptées à d'autres nombres.
Nous avons constaté que l'installation de ces procédures élémentaires automatisées permettait aux élèves d'échapper à l'automatisme en mobilisant plus aisément des procédures adaptées aux nombres et aux opérations en jeu.
Cela permet d'initialiser une dynamique favorisant les apprentissages numériques. Les élèves mobilisent, grâce à un répertoire numérique plus riche, des procédures de calcul plus économiques. Ils sont ainsi amenés à explorer de nouvelles propriétés des nombres et des opérations, et ils acquièrent par là des connaissances plus riches, connaissances qui les rendent encore plus habiles pour de nouveaux calculs.

Des exemples d'activités de calcul mental

Forme, contenu et fréquence des activités de calcul mental

Nous avons choisi de présenter sous deux formes différentes les activités de calcul mental selon l'objectif que nous visons prioritairement.

Chaque jour, pendant 10 à 15 minutes, nous demandons aux élèves d'effectuer mentalement des calculs (selon le procédé dit de « La Martinière »). Ceux-ci écrivent le résultat de l'opération sur leur ardoise. L'enseignant valide les calculs et corrige si besoin rapidement les erreurs. Le but prioritaire est d'entraîner les élèves au calcul, de les confronter avec des exemples variés, d'accroître leurs performances (rapidité, mémorisation, maîtrise de techniques).

Une fois par semaine, une séance un peu plus longue (de l'ordre d'une vingtaine de minutes) est consacrée à l'explicitation, la comparaison des différentes procédures mobilisées par les élèves, y compris les procédures erronées quand elles révèlent une difficulté significative. Cette comparaison débouche sur une hiérarchisation dépendant des connaissances des élèves et des données intervenant dans les calculs. Le professeur s'attache alors à mettre en regard l'économie de certaines procédures et les propriétés des nombres en jeu. Il s'agit de capitaliser l'exploration effectuée dans les activités précédentes. Le nombre des calculs alors demandés aux élèves est nettement moins important que dans les activités précédentes. Si besoin, le professeur peut introduire ou rappeler certaines procédures jugées efficaces qui n'auraient pas été énoncées par les élèves.

Nous détaillons quelques activités portant d'une part sur l'addition et la soustraction et d'autre part sur la multiplication et la division.

Additions et soustractions

Il s'agit de trois séries d'activités de calcul mental. Une première série d'activités, plus traditionnelles, revient à explorer, mémoriser et tester les tables d'additions et de soustractions. Une deuxième série d'activités porte sur la recherche de compléments à dix, cent, mille, etc… Une troisième concerne davantage les additions et soustractions mentales.

Les tables d'additions et de soustractions

Evoquons deux types d'activités permettant d'explorer et de mémoriser les faits numériques relevant des tables d'addition et de soustraction.

Le premier type est constitué de jeux de calcul mental utilisant différents supports : jeux de cartes (bataille, mariages), jeux de dominos, loto, labyrinthe, puzzles, etc. Nous renvoyons le lecteur à la lecture des différents ouvrages détaillant ces jeux[4].
Un second type d'activités a pour objectif la mémorisation des tables, nous pouvons distinguer :

- *la recherche de la somme ou de la différence* :
  8 + 7 = ?   9 – 3 = ?
- *la recherche de l'un des termes de la somme ou de la différence* :
  9 + ? = 14   8 - ? = 5   ? – 7 = 4
- *la recherche des deux termes de la somme ou de la différence* :
  ? + ? = 18   ? - ? = 6

Recherche de compléments

- *Compléter à 10*
  Le professeur pourra jouer sur la formulation de la consigne :
    - *Complète 3 pour faire 10.*
    - *Combien manque-t-il à 3 pour faire 10 ?*
    - *Que faut-il ajouter à 3 pour faire 10 ?*
    - *3 pour aller à 10 ?*
    - *3 → 10 ?*
- *Compléter à la dizaine supérieure*
  Consigne : *complète 38 à la dizaine supérieure* ou *38 pour aller à la dizaine supérieure* ou *125 pour aller à 130.*

[4] C'est le cas en particulier de l'ouvrage ERMEL, éditions Hatier.

- *Compléter à 100 ou la centaine supérieure*
    - 30 → 100		54→ 100
    - 182→ 200		327→ 400
- *Trouver le complément quand il s'agit de 10 ou d'un multiple de 10*
    - 32 → 42		48→ 78		25→ 325

Autres activités

- *Ajouter 10 ou un nombre entier de dizaines à un nombre de deux ou trois chiffres*
    - Ajouter 10 :		55 + 10		257 + 10
    - Ajouter un nombre entier de dizaines :	60 + 30		38+ 60		40+122
- *Soustraire 10 ou un nombre entier de dizaines à un nombre de deux ou trois chiffres*
    - 64 – 10	55 – 30		238 – 40
- *Ajouter ou soustraire 100 ou un nombre entier de centaines à un nombre de trois ou quatre chiffres*
    - 325 + 100	1234 + 100		325 – 100	1234 – 100
    - 810 – 200	652 – 400		4500 – 600	1370 - 500
- *Trouver le plus rapidement possible le résultat d'une addition en ligne*
    - 27 + 15 + 4 + 3 + 5
- *Décomposer additivement un nombre en un nombre entier de centaines, dizaines et unités*
    - 34 = 30 + 4		327 = 300 + 20 + 7	1004 = 1000 + 4
- *Exprimer un nombre en faisant intervenir la dizaine, la centaine supérieure, etc.*
    - 47 = 50 – 3			47 = 100 – 53
- *Compléter des égalités du type*
    - Il s'agit d'utiliser la décomposition décimale du second terme :
      37 + 18 = 47 + ?		54 + 27 = 74 + ?
    - Il s'agit de faire apparaître dans le calcul un multiple de 10 ou 100 :
      27 + 8 = 30 + ?		54 + 27 = 60 + ?		54 + 27 = 80 + ?
      128 + 15 = 130 + ?	128 +15 = 140 + ?

Multiplications, divisions

Comme pour l'addition, une première série d'activités, plus traditionnelles, a pour but d'explorer, de mémoriser les tables de multiplications. D'autres activités ont pour but d'installer des modules automatisés de calcul. Dans ce dernier cas, le calcul n'est pas obligatoirement totalement mental. Une trace écrite peut être autorisée (par exemple pour les multiplications par 25), l'important étant que les élèves utilisent une autre procédure que l'algorithme écrit.

Les tables de multiplications

De même que pour l'addition et la soustraction, cela correspond à deux types d'activités permettant d'explorer et de mémoriser les faits numériques relevant des tables de multiplication : les jeux de calcul mental utilisant différents supports d'une part et des exercices centrés sur la mémorisation des tables d'autre part.

- *La recherche du produit* :		8 × 7 = ?	9 × 3 = ?
- *La recherche de l'un des facteurs* :	9 × ? = 63	8 × ? = 72
- *La recherche des deux facteurs du produit* :	? × ? = 56

Autres activités

- Recherches de multiples et diviseurs
  - *Multiples* : 48 est-il multiple de 6 ? 54 est-il multiple de 9 ?
  - *Diviseurs* : 6 est-il un diviseur de 42 ? 3 divise-t-il 63 ?
- Quotients entiers
  - 42 divisé par 6 ?
  - Quel est le quotient de 42 par 6 ?
  - 42 : 6 56 : 8 49 : 7
- Décompositions multiplicatives
  - *Ecris sous la forme d'un produit* : 30 48 24 12
  - *Trouver des décompositions multiplicatives d'un nombre égal à une puissance de 2 :* 32 64 128
  - *Jeu du télégramme*

    Les élèves sont regroupés par équipe (de 4 à 6 élèves). Ils disposent d'une feuille pré-pliée sur laquelle est inscrit un nombre : par exemple 3248.

    Le premier élève écrit autrement ce nombre (par exemple 3000 + 248) et cache (en repliant la feuille), l'écriture précédente. L'élève suivant écrit autrement 3000+248 (par exemple $3\times1000 + 248$) et cache la précédente écriture. Chaque élève ne peut voir que la dernière écriture produite.

    Quand la feuille est remplie, on la déplie et compare les écritures produites.

    L'équipe gagnante est l'équipe qui a le plus d'écritures différentes.

    On peut aussi créditer les écritures d'un score selon la nature et le nombre de signes opératoires : pour une écriture exacte : un signe + rapporte 1 point, un signe – rapporte 2 points, un signe × 3 points, etc… Une erreur pénalise l'équipe de 1 point.
- Multiplications, divisions par 10^n, « la règle des zéros »
  - *Multiplier par 10 un nombre de deux ou trois chiffres*

    27×10 10×56 321×10 10×900

    À quoi est égal 60 dizaines ? 245 dizaines ? 602 dizaines ?
  - *Calcul de suites géométriques* : multiplier le nombre 3 par 10, puis le résultat par 10 et ainsi de suite…
  - *Multiplier par 100, par 1000 un nombre*

    45×100 650×100 1002×100 1325×1000
- Diviser un nombre par 10, 100, 1000, 10^n
  - Diviser le nombre 12 000 par 10, diviser son résultat par 10, etc.
  - 45 millions divisé par 10 ?
  - 1350 : 10.
  - *Quotient entier* : Quel est le quotient entier de 62 par 10 ? Ou bien quel est le nombre de dizaines de 62 ?
- Multiplier par 5, diviser par 5
  - 5×200 5×263 70 : 5 255 : 5 400 : 5
- Multiplier, diviser par 50
  - *Multiplier par 50* : 3×50 18×50 50×50
  - *Multiplier par 5, 50, 500*
  - *Diviser par 50* : 500 : 50 2000 : 50
  - *Quel est le quotient entier (et le reste) de* : 165 par 50 2640 par 50

- Multiplier et diviser par 25
    - 4×25 8×25 50×25 25×32
    - *multiplier par 25, 250, 2500*
    - *Quotient exact par 25* : 100 : 25 ; 300 : 25 ; 500 : 25 ; 1200 : 25
    - *Quotient entier par 25* : 165 780 1355

Une première conclusion

Ces activités systématiques de calcul mental permettent aux élèves d'acquérir une plus grande maîtrise et d'explorer un domaine de faits numériques plus vastes. Les techniques élémentaires de calcul ainsi automatisées peuvent jouer le rôle de modules de calcul pouvant être mobilisés pour construire des procédures plus complexes. De même, une fréquentation régulière permet d'accroître le domaine des différentes décompositions additives ou multiplicatives rencontrées. Leur utilisation et leur mémorisation les rendent davantage disponibles. Les élèves sont ainsi amenés à les utiliser dans des calculs de sommes ou de produits. Une dynamique est ainsi initialisée qui permet aux élèves de prendre de la distance par rapport aux procédures qui auraient pu leur apparaître plus sûres dans un premier temps. C'est notamment le cas pour les algorithmes écrits.

Cependant, certaines conditions doivent être remplies pour que cette dynamique soit possible. Les élèves doivent savoir détecter les moments où il faut inventer et ceux où il faut reproduire, ce qui nécessite de la part du professeur des institutionnalisations « souples ». Ce dernier doit non seulement faire expliciter les procédures mobilisées mais il doit aussi les hiérarchiser et, pour certaines, institutionnaliser aussi leur domaine de validité. Une pratique régulière de calcul mental doit ainsi avoir pour objectif d'amener l'élève non seulement à mettre en œuvre des procédures économiques mais aussi à en percevoir le domaine d'efficacité. L'institutionnalisation que nous qualifions de « souple » porte à la fois sur l'économie de la procédure et sur son domaine d'efficacité. Elle ne doit pas être trop rapide ni trop « forte » car cela risquerait de se faire au détriment de l'adaptabilité. Elle ne doit pas être trop « faible » ni trop « tardive » car alors toutes les procédures pourraient apparaître comme équivalentes. Elle doit amener les élèves à prendre conscience de l'éventail et de la hiérarchie des procédures mises en œuvre dans la classe.

Les élèves en difficulté en mathématiques et notamment en difficulté en calcul mental ne réussissent pas aussi bien que leurs pairs à entrer dans cette dynamique. En effet, ce sont souvent des élèves qui, au quotidien, ne parviennent pas suffisamment à appréhender les enjeux des situations d'enseignement qui leurs sont proposées. De plus, ils éprouvent des difficultés à mettre en relation les nouvelles connaissances avec les connaissances plus anciennes. De ce fait, ils ne comprennent pas toujours le contenu des institutionnalisations. Ainsi, toutes les procédures peuvent leur apparaître comme égales. La pertinence de leur mobilisation peut ne pas être mise en relation avec les propriétés des nombres intervenant dans les calculs.
Ces élèves peuvent alors devenir prisonniers d'une dynamique renforçant leurs difficultés. Leurs connaissances insuffisantes sur les nombres, sur les opérations et leurs propriétés les conduisent à produire plus souvent que leurs pairs des procédures de calculs inadaptées. Ne comprenant pas les enjeux des moments d'échanges d'expériences de calculs, ne prenant pas suffisamment la mesure des hiérarchies effectuées, ils ne peuvent pas bénéficier des procédures automatisées installées à ces occasions. Ne fréquentant pas assez de nouvelles décompositions des nombres, leurs connaissances ne s'accroissent pas

suffisamment pour leur permettre d'échapper à l'automatisme. Cela contribue à renforcer les différences de performances et de connaissances entre les élèves.
Ce constat nous a conduit à préciser d'autres conditions permettant à ces élèves d'échapper à l'automatisme. C'est l'objet de la seconde partie de cet article.

Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté

Les élèves en difficulté ne bénéficient donc pas au même titre que les autres d'un enseignement de calcul mental. L'apprentissage de techniques de calculs élémentaires, la familiarisation avec diverses décompositions additives ou multiplicatives des nombres, des institutionnalisations souples ayant pour but de hiérarchiser les procédures rencontrées et de préciser leur domaine d'efficacité ne suffisent pas. Les tentatives du professeur pour leur faire utiliser des procédures spécifiques, adaptées au calcul en jeu se révèlent souvent infructueuses.

Dans cette seconde partie, nous étudions des conditions spécifiques permettant à ces élèves de surmonter les difficultés explicitées précédemment. L'étude de ces conditions est en étroit rapport avec l'étude des processus de conceptualisation et de décontextualisation. Ces deux processus sont liés. Nous admettons que chez les élèves de 11 à 13 ans, la conceptualisation de certaines notions mathématiques implique et est impliquée par différentes activités de décontextualisation : généralisation, changement de contexte, formalisation, etc., qui correspondent à des degrés différents. Notons que la décontextualisation peut être en partie dévolue aux élèves, par exemple dès qu'il y a explicitation de leur part de modèles implicites mobilisés dans l'action ou lors de différentes phases de formulation. Ces dernières peuvent par exemple prendre la forme d'un débat débouchant sur la production collective d'un écrit.
Dans un premier temps, nous revenons sur les liens existant entre apprentissages de connaissances numériques et apprentissages de techniques opératoires en centrant notre regard sur la résolution de problèmes numériques standard[5]. Dans un deuxième temps, nous mettons en évidence la nécessité de construire un enseignement offrant des cheminements cognitifs différents aux élèves en difficulté. Ces cheminements se caractérisent notamment par l'existence d'étapes originales. En conclusion, nous précisons les limites de ce type d'enseignement et dégageons des pistes possibles pour les dépasser.

Rapports entre maîtrise de techniques opératoires et résolution de problèmes standard

Nous avons montré (Butlen, Pézard 2002) qu'une pratique régulière de calcul mental, en améliorant les habiletés calculatoires des élèves, se traduit pour un certain type de problèmes standard par une accélération du processus de reconnaissance de l'opération en jeu. Il s'agit de problèmes relevant de modèles relativement familiers aux élèves, mais dont la reconnaissance n'est pas encore automatisée. Ce sont, par exemple des problèmes additifs faisant intervenir des compositions de transformations type « le jeu de l'autobus » : « *Dans un autobus, il y a 28 voyageurs. À la prochaine station, 15 voyageurs montent et 17 descendent. Combien y a t il de voyageurs dans l'autobus quand il repart ?* » ou des problèmes multiplicatifs simples : « *Pour réaliser un pull, Sylvie achète 18 pelotes de laine à 5 € la pelote. Calcule le montant de la dépense.* »

---

5 Nous appelons problèmes numériques standard des problèmes habituels de l'école élémentaire, ne présentant pas de difficulté particulière, notamment de vocabulaire et de syntaxe. Leur résolution fait intervenir une ou plusieurs des 4 opérations. Les données numériques peuvent être toutefois plus ou moins complexes.

Pour cela, nous avons comparé les performances et procédures d'élèves de CM2 entraînés régulièrement au calcul mental et celles d'élèves de classes équivalentes mais n'ayant pas suivi un enseignement aussi important dans ce domaine. Les élèves devaient résoudre un ensemble de 24 problèmes par écrit, mais aussi mentalement (quatre problèmes à chaque fois).
Nous avons ainsi construit un test de 24 problèmes numériques qui s'inscrivent dans les apprentissages prévus en dernière année d'école élémentaire et qui portent sur des notions introduites auparavant. Ce sont des problèmes que nous qualifions de standard. Nous avons fait ce choix pour limiter le nombre des variables intervenant dans la construction de ces problèmes. Il s'agit de la nature des opérations arithmétiques (addition, soustraction, multiplication, division) et du nombre de données numériques (deux données, trois données, une donnée inutile). Nous avons aussi défini deux degrés de complexité des problèmes : « simple » ou « complexe ». Pour cette différenciation, nous nous appuyons sur les travaux de G. Vergnaud (1982, 1983).

Nous croisons la variable « type d'opération » avec les variables « données numériques » et degré de complexité, ce qui conduit à 24 problèmes différents. Le tableau ci-dessous synthétise les critères qui ont servi à l'élaboration de ces 24 problèmes. Les problèmes situés en haut à gauche d'une case sont des problèmes « simples », ceux situés en bas à droite sont des problèmes « complexes ».

Données numériques **Opérations**	**2 données**	**3 données**	**une donnée inutile (di)**
Addition	état final *n°4* état initial *n°5*	état final *n°12* composée de transformations *n°16*	réunion *n°10* état initial *n°3*
Soustraction	complément *n°15* état initial *n°19*	état final *n°6* composée de transformations *n°7*	Distance *n°11* composée de transformations *n°21*
Multiplication	addition réitérée *n°1* Aire *n°8*	addition réitérée *n°20* Volume *n°13*	addition réitérée *n°2* Produit cartésien *n°24*
Division	Répartition (reste nul) *n°17* multiplication inverse (aire) *n°22*	répartition (avec reste) *n°9* division avec reste *n°14*	division (reste nul) *n°23* multiplication inverse *n°18*

Critères de construction des problèmes

Pour l'addition, nous considérons comme problèmes « simples », les problèmes de composition de mesures (réunion) ou ceux faisant intervenir le calcul d'un état final. Nous considérons comme problèmes « complexes », les problèmes de calcul d'un état initial ou ceux faisant intervenir une composition de transformations positives.
Pour la soustraction, de la même façon, nous considérons comme problèmes « simples » soit les problèmes de recherche du complément, soit les problèmes de calcul d'un état final

(sens « enlever »). Nous considérons comme problèmes « complexes » soit les problèmes de calcul d'un état initial, soit les problèmes de composition de transformations négatives (à noter que ces derniers se résolvent en fait par une addition).
Pour la multiplication, nous considérons comme « simples », les problèmes d'addition réitérée ou de calcul du cardinal d'une collection discrète pouvant se représenter par une « grille rectangulaire ». Nous considérons comme « complexes », les problèmes de combinatoire (recherche de tous les possibles) et ceux faisant intervenir un calcul d'aire ou de volume.
Pour la division, nous considérons comme « simples », les problèmes de partage ou de répartition et comme « complexes », les problèmes faisant intervenir l'inverse d'une multiplication ou la recherche d'une dimension dans un calcul d'aire ou de volume. Les problèmes de division avec trois données n'étant pas adaptés, nous proposons à la place des problèmes de division avec reste.

D'après nos recherches (Butlen, Pézard 2002), un entraînement au calcul mental, en allégeant les tâches de calcul, favorise donc une « prise de sens » lors de la résolution de problèmes et contribue à accélérer l'automatisation de la reconnaissance du modèle (opération(s) en jeu).
Les automatismes de calcul installés au cours d'une pratique régulière de calcul mental permettent aux élèves de construire des schémas de problèmes (Julo, 1995). Tout se passe comme si l'élève avait construit une mémoire des problèmes déjà rencontrés ainsi que des procédures de résolution associées. Cette mémoire s'organise grâce à une certaine catégorisation et à un recours à des problèmes prototypiques représentatifs de chaque catégorie. L'élève s'avère alors capable de mobiliser à bon escient le modèle le plus adapté pour résoudre le problème.
Là encore, l'examen des performances des élèves montre que tous ne profitent pas de ces enseignements. Tous n'entrent pas dans cette dialectique entre sens et technique, entre automatisation et adaptation aux conditions particulières de la tâche. Tout se passe comme si les élèves les plus en difficulté n'en avaient pas les moyens soit en termes de pré requis (connaissances sur les nombres et les opérations insuffisantes, fréquentation moins importante des problèmes notamment), soit en terme de temps, soit en termes d'évaluation des enjeux d'apprentissage des situations qui leur sont proposées. Il nous a alors paru nécessaire de penser un dispositif susceptible de combler ces faiblesses.

Une nouvelle ingénierie comportant des situations de bilan de savoirs et une explicitation de méthodes

Notre but est de permettre aux élèves en difficulté de mieux capitaliser leur acquis dans le domaine du calcul mental en vue d'un éventuel réinvestissement dans la résolution de problèmes numériques.
Pour cela, nous inspirant des travaux en linguistique sur le rôle de l'écrit (Bautier 1995, Lahire 1993), en sociologie sur la notion de rapport au savoir (Charlot, Bautier, Rochex, 1992), en didactique des mathématiques sur le rôle du débat (Legrand 1991) et en psychologie cognitive sur la dialectique entre apprentissage individuel et apprentissage collectif, nous avons pensé un dispositif d'enseignement plus complet. Il s'organise autour de trois axes : une pratique régulière de calcul mental, des situations de bilans écrits de savoirs élaborés collectivement au cours d'un débat entre pairs, une confrontation régulière à l'explicitation de méthodes de calcul et de résolution de problèmes[6].

[6] Il s'agit de problèmes « classiques » relevant des trois niveaux testés : CM2, sixième, cinquième, dont l'énoncé et les valeurs numériques sont compatibles avec une résolution mentale.

Description de l'ingénierie et du public concerné

Nous présentons en annexe 2 des exemples d'activités proposées en CM_2, $6^{ème}$ et $5^{ème}$. Décrivons plus particulièrement les situations de bilan de savoirs. Précisons la tâche prescrite aux élèves.

> « *En dix lignes maximum, vous rédigez par écrit un texte résumant tout ce qui a été appris depuis la dernière séance pendant les activités de calcul mental et de résolution mentale de problèmes ; vous préciserez si ce que vous avez appris lors de ces activités vous a été utile dans d'autres activités.* »

Un texte produit initialement par deux élèves est mis en débat avec l'ensemble de la classe. Il est éventuellement amélioré collectivement puis adopté. Il est ensuite recopié dans un classeur (individuel mais aussi collectif) ; chaque élève peut ainsi y avoir accès. L'ensemble de ces textes constitue une mémoire collective écrite du travail effectué par les élèves dans le domaine numérique. Ces derniers explicitent à cette occasion ce qu'ils jugent collectivement important de retenir des activités pratiquées.

Grâce à ces bilans réguliers de savoirs, il est possible d'accéder à ce que les élèves retiennent des activités de mathématiques, à ce qui est important pour eux. La régularité de ces séances permet de reconstruire l'histoire de l'appropriation des notions enseignées : il est ainsi possible de recueillir des indices sur le niveau de disponibilité des connaissances des élèves et l'évolution de leurs conceptions.

Le professeur joue essentiellement un rôle d'animateur lors du débat. Il n'intervient que pour relancer la discussion, évaluer l'accord de la classe à une proposition de modification ou demander des compléments d'activités ou des explications supplémentaires, mais il ne modifie jamais les textes élaborés par les élèves quand bien même il peut lui arriver de temps à autre de corriger l'orthographe ou de rectifier certaines formulations secondaires par rapport au sens de telle ou telle proposition. Il peut aussi être demandeur de nouvelles formulations, et il intervient également chaque fois que les élèves produisent un énoncé mathématiquement erroné.

En plus de ces bilans collectifs de savoirs, nous avons recueilli, en fin d'année, des bilans individuels de savoirs auprès des élèves des classes entraînées mais aussi de classes témoins. La comparaison de ces productions individuelles issues des deux types de classe nous a permis d'avoir des éléments de mesure de l'impact de notre ingénierie.

Notre ingénierie a été testée dans trois niveaux de classe (CM_2, $6^{ième}$ et $5^{ième}$) avec des élèves souvent en difficulté en mathématiques.

L'expérimentation s'est déroulée durant une année scolaire dans la classe de CM_2 ; elle a duré deux ans au collège, les élèves de sixième étant suivis l'année suivante en cinquième.

Les résultats

Nous avons mis en évidence des cheminements cognitifs différents selon les élèves. Certains ont besoin de passer par des étapes originales que nous avons interprétées comme des étapes du processus de conceptualisation de certaines notions mathématiques.

Nous allons développer deux exemples.

Le recours à l'exemple générique

Nous avons caractérisé ces étapes en prenant notamment en compte le degré de décontextualisation, de dépersonnalisation des textes que pouvaient produire individuellement ou collectivement les élèves.

Notre objectif était d'amener les élèves, grâce au recours à l'écrit et grâce au débat, à produire des textes mathématiques davantage décontextualisés. En effet, les élèves, dans un premier temps, produisent des textes qui sont surtout des descriptions des tâches prescrites par l'enseignant ou des exemples isolés sans généralisation.

En voici un exemple (classe de CM2) :

> *« Nous avons fait des multiplications et des divisions avec des entiers puis avec des décimaux. »*

Ou bien : (classe de CM2) :

> *« Cette semaine, nous avons joué au compte est bon. On nous donnait quatre nombres. Il fallait essayer de s'approcher le plus possible du nombre donné (ou de l'atteindre) en faisant des additions, des multiplications, des divisions ou des soustractions. Tous les nombres devaient être utilisés une et une seule fois.*
>
> > *Ex : trouver un nombre (132) avec 6, 16, 4, 32.*
> > *$6 \times 16 = 96$*
> > *$96 + 32 = 128$*
> > *$128 + 4 = 132$ »*

Nous avons constaté que les élèves ayant bénéficié de notre ingénierie produisaient souvent des textes intermédiaires entre ces énoncés très contextualisés et des énoncés formels du type (classe de CM2) :

> *« Pour multiplier un nombre par des puissances de 10, on met autant de zéros à droite du nombre que l'indique l'exposant. »*

Ces énoncés intermédiaires comportent l'énoncé de la propriété ou de la règle et un exemple l'illustrant ou la générant, constituant donc un exemple générique. En voici deux illustrations :

- la règle est formulée à partir d'un exemple (classe de CM2) :

  > *« Nous multiplions 42×56 ; $42 \times 50 = 2100$; $42 \times 6 = 252$; $2100 + 252 = 2352$; on a décomposé la multiplication par une addition avec un nombre exact de dizaines. »*

- la règle est illustrée par un exemple (classe de CM2) :

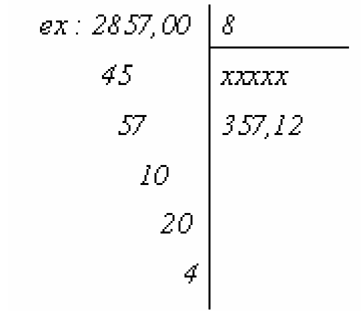
  > *« Cette quinzaine, nous avons fait des multiplications par 25. Il fallait multiplier par 100 et diviser par 4. Exemple : $22 \times 25 = ?$ On fait $22 \times 100 = 2200$ et $2200 / 4 = 550$. »*

Le recours à l'exemple générique peut s'expliquer par un souci de communication entre pairs. Pour se faire comprendre des autres, l'élève ressent le besoin d'expliciter la règle à l'aide d'un exemple. Cette explicitation lui est aussi bénéfique dans la mesure où il s'explique ainsi à nouveau la règle et son contexte. En expliquant aux autres, il s'explique à lui-même.
Les situations de bilans de savoirs s'appuient ainsi sur une dialectique entre apprentissage collectif et apprentissage individuel.
Le débat et le recours à l'écrit permettent donc à certains élèves de prendre de la distance par rapport au contexte de l'apprentissage, d'accéder à un niveau supérieur de décontextualisation et de généralisation.

Ces énoncés intermédiaires caractérisent une étape, semble-t-il obligatoire pour certains élèves, dans le processus de conceptualisation. Recourant à l'exemple générique, ils se situent entre le contextualisé et le général, entre l'exemple isolé et l'énoncé formel. Ces étapes n'apparaissent pas d'elles-mêmes. Il est nécessaire de prévoir un dispositif d'enseignement qui en assure l'existence. En effet, nous avons constaté, en demandant de rédiger des bilans de savoirs à des élèves n'ayant pas bénéficié de notre ingénierie, qu'ils ne produisaient que très rarement ce type d'énoncés intermédiaires. La majorité des élèves produisent des énoncés très contextualisés. Quelques élèves essaient de restituer les

énoncés formels issus du cours du professeur.
Ainsi, l'énoncé ci-dessous restitue un exemple mathématique isolé, illustrant une action ou une consigne :

> *« Cette dernière semaine, nous avons donné la valeur exacte du quotient sous forme de fractions et nous l'avons encadré entre deux nombres entiers naturels puis nous avons précisé en l'encadrant entre deux nombres décimaux allant jusqu'au centième, millième, $1/10^n$.*



357 < 357,12 < 2857/8 < 357,13 < 358. »

Nous avons cité ci-dessus un exemple d'énoncé formel exact. Voici une tentative de restitution d'un énoncé formel concernant le traitement de la soustraction d'une somme :

« Nous avons appris que : $-(a+b+c) = \pm a \pm b \pm c$.»

Le débat entre pairs joue un rôle déterminant dans le processus de décontextualisation des énoncés mathématiques produits comme le montre le tableau ci-dessous. La grande majorité des éléments d'énoncés rajoutés collectivement lors du débat sont décontextualisés.

	CM_2	$6^{ème}$	$5^{ème}$
% d'énoncés mathématiques plutôt décontextualisés élaborés lors du débat (par rapport à l'ensemble des énoncés mathématiques élaborés lors du débat).	93%	75%	91%
% d'énoncés de méthodes plutôt décontextualisés élaborés lors du débat (par rapport à l'ensemble des énoncés de méthodes élaborés lors du débat).	43%	75%	74%

Le recours à des outils heuristiques

Dans les classes où nous avons travaillé, nous observons un changement du statut des nombres intervenant dans les énoncés de problèmes. Dans les bilans individuels des élèves recueillis en fin d'année, nous avons trouvé des énoncés du type :

> *« Quand il y a des nombres compliqués, on les simplifie ; après les avoir simplifiés, on cherche une méthode et lorsque l'on trouve, on l'applique aux nombres compliqués. »*

Lors de la recherche d'une solution, des élèves déclarent donc remplacer les données numériques soit par des nombres plus simples, soit par des lettres. Les données numériques pouvant varier, l'accès au modèle (la recherche de l'opération arithmétique sous-jacente) est alors plus aisé.
Cette stratégie relève de l'heuristique dans la mesure où elle accroît les possibilités d'exploration des relations en jeu dans le problème à résoudre. Cet outil heuristique est caractéristique selon nous d'une étape intermédiaire entre l'arithmétique et l'algèbre. En effet, les élèves qui s'autorisent à remplacer les données du problème par des nombres plus

simples et a fortiori par des lettres ne les considèrent plus comme fixes. Cette stratégie de résolution peut-être qualifiée de « pré-algébrique ».

Nous avons également constaté que cela va de pair avec une utilisation plus experte du calcul mental lors de la résolution de problèmes. Les élèves sont plus nombreux à déclarer calculer des ordres de grandeur, soit pour chercher l'opération à effectuer, soit pour vérifier leur résultat. Une plus grande habileté calculatoire se traduit ainsi par une plus grande capacité à prévoir et contrôler le résultat des calculs. En effet, leurs pairs entraînés au calcul mental mais n'ayant pas bénéficié des bilans de savoirs déclarent seulement que cette pratique les rend plus à l'aise dans les calculs.

Apports et limites de l'ingénierie

Nous avons vu qu'un enseignement comportant des situations ayant pour objectif d'amener les élèves à prendre de la distance par rapport au contexte permettait à certains d'entre eux d'accéder à un niveau supérieur de conceptualisation grâce à des étapes prenant en compte leur difficulté à décontextualiser, à généraliser et donc à réinvestir les apprentissages effectués dans un contexte donné.
Nous pensons ainsi avoir mis en évidence des situations permettant à certains élèves en difficulté, notamment scolarisés en ZEP, de parcourir des cheminements cognitifs originaux.

Toutefois cet apport rencontre certaines limites. Nous avons en effet constaté que les élèves les plus en difficulté ne profitent pas, comme leurs pairs, de ces étapes.
Nous avons classé les élèves ayant bénéficié de notre ingénierie (il s'agissait de classes plutôt faibles) en quatre catégories allant des plus performants (A) aux plus faibles (D) en passant par les élèves moyens (B) et les élèves en difficulté moyenne (C). Nous constatons que ce sont les élèves des catégories A, B et C qui ont recours à l'exemple générique.
En CM2 et cinquième, les énoncés intermédiaires sont produits essentiellement par les « bons élèves » (catégorie A) et par les élèves « plutôt faibles » (catégorie C). En sixième, ce sont surtout les « bons » élèves (catégories A et B) qui produisent les énoncés intermédiaires.

Les élèves de catégorie A

À tous les niveaux de scolarité étudiés, ils s'avèrent capables de produire des énoncés de tout degré de décontextualisation. Ainsi, 4 élèves sur 7 en CM2, 2 sur 5 en sixième et 6 sur 8 en cinquième produisent des énoncés intermédiaires. Nous pouvons interpréter leur production d'énoncés intermédiaires comme un effet de contrat. Habitués à produire ce type d'énoncés lors des bilans collectifs de savoirs, ils le font également lors des bilans individuels de fin d'année. Toutefois, comme ils sont capables de produire des énoncés formels, la production d'énoncés intermédiaires ne constitue pas forcément, pour eux, un passage obligé. Cela semble davantage être le signe d'une plus grande capacité à s'adapter aux exigences de la communication.

Les élèves de catégorie B

Les élèves moyens de CM2 et cinquième produisent soit des énoncés contextualisés, soit des énoncés formels. En sixième, leurs productions représentent tous les types d'énoncés, la moitié d'entre eux produisant uniquement des énoncés intermédiaires. La production de ce dernier type d'énoncés semble leur être profitable et nécessaire pendant un temps relativement court. En cinquième en effet, dans leurs bilans individuels de savoir, ils abandonnent la production de ces énoncés pour des énoncés formels. Ils sont sans doute moins sensibles aux effets de contrat que leurs pairs de catégorie A.

Les élèves de catégorie C

La moitié des élèves en difficulté moyenne produisent des énoncés intermédiaires en CM2 et en cinquième. En sixième, ils ne produisent pas d'énoncés de ce type, mais produisent essentiellement des exemples seuls. Cette différence de résultats entre la sixième et les deux autres classes peut s'expliquer à la fois par la faible participation des élèves de cette classe au débat, par leur rapport particulier à l'écrit et par des effets de contrat. À ce niveau scolaire, ce sont les élèves les plus performants qui s'autorisent à produire plus d'énoncés mathématiques ou de méthodes en ayant recours partiellement au formalisme. Il semble qu'une année soit nécessaire pour que les élèves de collège participent, à degré égal à celui de l'école élémentaire, à l'élaboration et à l'amélioration collective d'écrits mathématiques.

Des contraintes institutionnelles spécifiques au collège - le remplacement d'un maître unique par une équipe de professeurs spécialisés - sont à l'origine de cette réticence. En CM2, c'est la même personne qui enseigne le français et les mathématiques. Écrire un texte se présentant comme une « rédaction » surprend moins les élèves de CM2. Ce n'est pas le cas au collège où les rôles sont plus spécialisés. Enfin, le professeur est le principal producteur d'écrits mathématiques : les définitions, théorèmes, règles sont en général formulés par le professeur. La part des élèves dans cette production est souvent faible, particulièrement au collège. La production par les élèves d'écrits mathématiques, surtout quand ils ont pour but de synthétiser les apprentissages effectués, ne fait pas partie du contrat. Ce rapport à l'écrit mathématique confère à un texte « écrit au tableau », même par un pair, un caractère officiel, qui rend toute modification difficile à envisager. Un temps assez long, supérieur à une année scolaire, semble nécessaire pour renégocier cet aspect du contrat didactique.
Ces contraintes semblent empêcher provisoirement les élèves en difficulté moyenne de bénéficier de notre ingénierie, en particulier de la situation de bilan de savoirs. Deux années seront nécessaires au collège pour permettre à la moitié d'entre eux d'accéder à ce niveau de décontextualisation.

Les élèves de catégorie D

Les élèves en difficulté importante produisent plutôt des textes qui restituent l'énoncé de la tâche prescrite ou décrivent le contexte de l'apprentissage en $6^{ème}$ (4 sur 6) ; c'est encore le cas d'un tiers d'entre eux en $5^{ème}$. En CM2, ils produisent soit des énoncés mathématiques contextualisés (3 élèves sur 5), soit des énoncés formels (3 élèves sur 5). En $5^{ème}$, la majorité d'entre eux produisent des énoncés très contextualisés. Notons toutefois que 4 élèves de ce niveau produisent des énoncés formels. Il faut dire que la majorité de ces élèves très faibles n'ont pas bénéficié du dispositif d'enseignement en $6^{ème}$, ils sont en effet issus d'autres classes. On dénombre un élève sur les cinq de catégorie D en CM2, 1 sur 6 en sixième et 2 sur 9 en cinquième qui produisent des énoncés intermédiaires.

Un intermédiaire profitable pour les élèves en difficulté moyenne

Il semble donc que notre ingénierie crée des conditions permettant à des élèves faibles (niveau C) de produire des énoncés intermédiaires. Cet effet, déjà perceptible au CM2, devient plus explicite au bout de deux années au collège. Cette production d'énoncés intermédiaires s'accompagne, d'après les évaluations du professeur, de réels progrès en mathématiques. Notre dispositif d'enseignement permet à ces élèves de produire des énoncés mathématiques plus décontextualisés, mais ancrés dans leur expérience personnelle. Cette production a été favorisée par les échanges avec leurs pairs et par l'explicitation de méthodes par le professeur. La mémoire collective de la classe ainsi construite semble constituer pour chacun un ensemble d'expériences, de connaissances et de savoirs en partie décontextualisés, vécus en commun avec les autres élèves et avec le maître, partiellement codifiés dans leur mémoire personnelle ; cela leur permet d'élargir leurs possibilités de formulation mais aussi de s'approprier, au moins partiellement, certaines notions et méthodes mathématiques.

Le fait que les élèves en grande difficulté ne bénéficient pas de notre ingénierie montre qu'il semble exister un seuil minimum de connaissances mathématiques pour que les élèves puissent s'approprier un type de formulation produit collectivement.
Nous pouvons émettre des hypothèses permettant d'expliquer ces limites. Le temps semble être un facteur important, surtout en collège. Ainsi, il faut deux années consécutives de pratique des bilans de savoirs pour obtenir une décontextualisation significative des énoncés mathématiques produits collectivement ou individuellement.

Il existe sans doute un seuil, définissable en termes de pré-requis, nécessaire pour appréhender les enjeux et les apports des débats réalisés à propos d'un texte écrit. Ceux-ci peuvent être très locaux ou au contraire plus globaux. Ils peuvent concerner l'apprentissage d'une notion donnée ou faire référence à l'apprentissage en général. Ainsi, le débat peut porter localement sur des amendements décontextualisant et généralisant un texte daté ou concerner le réinvestissement différé de la notion convoquée. Pour bénéficier du débat et de ces pas de côté, l'élève doit pouvoir appréhender les portées de ces deux enjeux.

Cela peut nécessiter également un changement de rapport au savoir, local quand il s'agit des phénomènes évoqués ci-dessus, ou plus général, voire un changement du rapport à l'école, quand ce sont les apprentissages scolaires dans leur ensemble qui sont interrogés par la situation. L'élève doit non seulement pouvoir en termes cognitifs mais aussi accepter (en termes de posture) d'entrer dans ces différents niveaux d'interrogation et de changement.

Conclusion

Nous avons rendu compte dans cet article du processus de conceptualisation de certaines notions numériques (décompositions additives et multiplicatives des nombres entiers, techniques de calcul mental, reconnaissance des opérations en jeu dans des problèmes numériques standard), en centrant notre regard sur les difficultés des élèves, notamment celles rencontrées par les élèves de milieux populaires : disponibilité des décompositions additives et multiplicatives des nombres lors de calculs mentaux, reconnaissance des opérations en jeu dans des problèmes standard, apprentissage d'un certain formalisme.
Nous avons essayé de pointer des sources potentielles de difficultés. L'une d'entre elles est liée à l'absence éventuelle de pré-requis correspondant soit à des manques de connaissances, soit à une difficulté à prendre en compte les enjeux des situations d'apprentissage.
Nous avons par exemple mis en évidence le rôle que pouvait jouer la maîtrise de certaines décompositions des nombres dans l'apprentissage des opérations mais aussi dans la connaissance des nombres eux-mêmes. Ainsi, un déficit dans la disponibilité de décompositions numériques peut amener certains élèves à ne pas mobiliser les procédures de calcul mental les mieux adaptées aux nombres en jeu. Ce manque d'adaptabilité se traduit alors par une exploration plus limitée des nombres et de leurs propriétés ; ce qui entraîne ensuite une plus faible connaissance de ces nombres et de leurs décompositions, etc… Une absence de pré-requis d'ordre cognitif peut être ainsi à l'origine d'un effet « boule de neige » tendant à aggraver le retard initial de connaissances mathématiques de ces élèves.

Nous avons vu que cet effet peut être limité par un enseignement adapté. Nous avons montré comment une pratique régulière de calcul mental pouvait permettre à des élèves de combler leurs manques de connaissances initiales. Cette pratique doit viser plusieurs objectifs : d'une part, installer des modules de calculs automatisés et accroître le répertoire de faits numériques mémorisés des élèves, et d'autre part, développer des capacités d'adaptabilité en enrichissant et hiérarchisant les procédures de calcul de chacun. Nous avons pour cela insisté sur la nécessité d'institutionnaliser certaines procédures et leur domaine de validité.
Nos recherches ont pointé que les effets bénéfiques d'un tel enseignement pouvaient être limités, voire annulés si les conditions du dépassement du paradoxe de l'automatisme n'étaient pas remplies.

Une autre source de difficulté réside dans la capacité des élèves à appréhender les enjeux des situations, notamment, pour ce qui nous concerne, à reconnaître les moments où ils doivent reproduire des automatismes et les moments où ils doivent mobiliser ces automatismes pour produire des procédures spécifiques, voire nouvelles.
Nous avons dégagé les apports et les limites d'un enseignement visant à développer ces compétences au moyen de la production de bilans de savoirs. Cette recherche a également montré la nécessité de prévoir un enseignement proposant des cheminements cognitifs différents (passage par un exemple générique avant l'énoncé formel, utilisation d'outils heuristiques de type « pré algébriques ») et adaptés aux manques ainsi révélés.

Références bibliographiques

BAUTIER E. (1995) Pratiques langagières, pratiques sociales. *De la sociolinguistique à la sociologie du langage*, Paris, l'Harmattan.

BOULE F. (1997) Performances et démarches de calcul mental au cycle III. Éléments pour une pédagogie du calcul mental, *Thèse de doctorat*, Villeneuve d'Asq, Presses universitaires du Septentrion

BUTLEN D., LE POCHE G. (1997) *Deux exemples de situations d'enseignement de mathématiques s'adressant à des élèves en difficulté.* In Ministère de l'Education Nationale Texte d'accompagnement des programmes, Paris

BUTLEN D., PEZARD M. (1992) Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de CE2 en difficulté, *cahier de DIDIREM* n° 13, Paris, IREM de Paris VII, Université de Paris VII.

BUTLEN D., PEZARD M. (1992) Elèves en difficulté, situations d'aide et gestion de classe associée, *Grand N n° 50*, 29-58, IREM de Grenoble, Université de Grenoble 1.

BUTLEN D., PEZARD M. (1992) Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du C.P. au CM_2, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol 12.2.3, 319-368, Grenoble, La Pensée Sauvage.

BUTLEN D., PEZARD M. (1997) Rapports entre habileté calculatoire et prise de sens dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire, *Cahier de DIDIREM* n° 27, Paris, IREM Paris 7, université de Paris 7.

BUTLEN D., PEZARD M. et al. (2000) Calcul mental et résolution de problèmes numériques au début du collège, *Repères-IREM*, n° 41, 5-24, Topiques Editions, Metz, France.

BUTLEN D., PEZARD M. (2003) Une contribution à l'étude des rapports entre habiletés calculatoires et résolution de problèmes numériques à l'école primaire et au début du collège, *Spirale, Revue de Recherches en Education*, vol 31, 117-140, Lille.

BUTLEN D., PEZARD M. (2003) Étapes intermédiaires dans le processus de conceptualisation, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 23.1, 1-40, Grenoble, La Pensée sauvage.

CHARLOT B., BAUTIER E. et ROCHEX J-Y. (1992) *École et savoir dans les banlieues... et ailleurs*, Paris, Armand Colin.

FAYOL M. (1985) Nombre, numération et dénombrement. Que sait-on de leur acquisition ? *Revue Française de Pédagogie n° 70*, 59-77, Paris, INRP.

FAYOL M., MONTEIL J-M. (1994) Stratégies d'apprentissages / apprentissages de stratégies, *Revue Française de Pédagogie*, n° 106, 91-110, Paris, INRP.

FISCHER J-P. (1987) L'automatisation des calculs élémentaires à l'école, *Revue Française de Pédagogie* n° 80, 17-24, Paris, INRP.

JULO J. (1995) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques, un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement*, Rennes, Presses Universitaires de Rennes.

LAHIRE B. (1993) *Culture écrite et inégalités scolaires,* Presses Universitaires de Lyon.

LEGRAND M. (1991) Circuit ou les règles du débat mathématique, in *Enseigner les mathématiques autrement en DEUG A, première année*, Lyon, IREM de Lyon.

RESNICK L-B. (1983) A developmental theory of number understanding, in H.P. Ginsburg (Ed), *The development of mathematical thinking, New York*, New York Academic Press.

RICHARD J-F. (1982) Mémoire et résolution de problèmes, *Revue Française de Pédagogie* n° 60, 9-17, Paris, INRP.

VERGNAUD G (1982) A classification of cognitive tasks and operations of though involved in addition and subtraction problems In *T.P.Carpenter J.M.Moser T.A. Romberg (eds) Addition and subtraction: A cognitive perspective*. Hillsdale Erlbaum.

VERGNAUD G (1983) Multiplicative structures In R.Lesh M.Landau (eds) *Acquisition of mathematics concepts and processes.* New York Academic Press.

Annexes

Annexe 1 : Énoncés des 24 problèmes du test

Le signe ×, -, + ou / indique l'opération. Les nombres 2 ou 3 indiquent le nombre de données. « di » indique la présence d'une donnée inutile. Les lettres s ou c indique le degré de difficulté (simple ou complexe).

Problème 1 : (×, 2, s) : Pour réaliser un pull, Sylvie achète 18 pelotes de laine à 20F la pelote. Calcule le montant de la dépense.

Problème 2 : (×, di, s) : Une famille de 3 personnes séjourne pendant 6 jours à la résidence « des 3 îles » ; le tarif journalier de la pension est de 200F par personne. Calcule le montant de la dépense.

Problème 3 : (+, di, c) : Marie fête son anniversaire le 22 septembre : elle a 11 ans. Elle dit à sa maman : "j'ai exactement 32 ans de moins que toi !"
Quel est l'âge de Maman ?

Problème 4 : (+, 2, s) : Hier, j'ai lu jusqu'à la page 134 de mon livre ; aujourd'hui, j'ai lu 27 pages. À quelle page en suis-je maintenant ?

Problème 5 : (+, 2, c) : Pierre a perdu 15 billes à la récréation ; il lui en reste 20. Combien avait-il de billes avant ?

Problème 6 : (-, 3, s) : Dans un autobus, il y a 38 personnes ; au premier arrêt, 8 personnes descendent ; au second arrêt, 6 personnes descendent. Combien y a t il de personnes dans l'autobus quand il repart ?

Problème 7 : (-, 3, c) : Au premier arrêt d'un autobus, 12 personnes montent ; au second arrêt, 4 personnes descendent ; au troisième arrêt, 5 personnes descendent. Y a-t-il plus ou moins de voyageurs dans l'autobus quand il repart ? Combien en plus ou en moins ?

Problème 8 : (×, 2, c) : Un quadrillage rectangulaire comporte 34 carreaux sur la longueur et 20 carreaux sur la largeur. Combien ce quadrillage a-t-il de carreaux ?

Problème 9 : (division avec reste, s) : On doit répartir 50 pommes dans des corbeilles de 8 pommes chacune. Combien peut-on remplir de corbeilles ? Combien reste-t-il de pommes ?

Problème 10 : (+, di, s) : Dans une ville, il y a 3 écoles ; dans la première, on compte 150 élèves ; dans la seconde, 58 élèves ; dans la troisième, 70 élèves. Combien y a t il d'élèves dans cette ville ?

Problème 11 : (-, di, s) : Jean part de Paris, doit passer par Melun et être à Fontainebleau à 10 heures ; la distance Paris Fontainebleau est de 65 km et il y a 15 km de Melun à Fontainebleau. Quelle est la distance entre Paris et Melun ?

Problème 12 : (+, 3, s) : Dans un autobus, il y a 36 personnes ; au premier arrêt, 3 personnes montent ; au second arrêt, 12 personnes montent. Combien y a t il de personnes dans l'autobus quand il repart ?

Problème 13 : (×, 3, c) : Dans une boîte, on dispose 5 morceaux de sucre sur la longueur, 3 morceaux sur la largeur et 4 morceaux sur la hauteur. Combien de morceaux de sucre y a t il dans la boîte ?

Problème 14 : (division avec reste, c) : Avec ses bottes de sept lieux, le petit Poucet se déplace de ville en ville ; il fait des pas de 8 km. S'il parcourt 50 km, combien de pas va-t-il faire ?

Problème 15 : (-, 2, s) : Dans un parking, il y a 100 places ; ce matin, 67 places sont occupées, combien reste-t-il de places libres ?

Problème 16 : (+, 3, c) : Au premier arrêt d'un autobus, 10 personnes montent ; au second arrêt, 3 personnes montent ; au troisième arrêt, 8 personnes montent. Y a-t-il des personnes en plus ou en moins dans l'autobus quand il repart après le troisième arrêt ? Combien en plus ou en moins ?

Problème 17 : (:, 2, s) : On répartit 126 œufs dans des boîtes de 6. Combien de boîtes peut-on remplir ?

Problème 18 : (:, di, c) : Pour Noël, Jean, qui dispose de 250F, a décidé d'offrir le même livre à ses 4 amis ; il paye 208F. Quel est le prix d'un livre ?

Problème 19 : (-, 2, c) : J'ai maintenant 200F dans ma tirelire ; on vient de me donner 50F en cadeau. Combien avais-je avant ?

Problème 20 : (×, 3, s) : Une famille de 3 personnes part à la montagne pendant 6 jours ; le tarif journalier de la pension est de 200F par personne. Quel est le montant de la dépense ?

Problème 21 : (-, di, c) : La distance entre chaque arrêt d'un autobus est d'environ 1500m ; au premier arrêt, 10 personnes montent ; au second arrêt, 3 personnes descendent ; au troisième arrêt, 5 personnes montent. Y a-t-il plus ou moins de voyageurs dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt ? Combien en plus ou en moins ?

Problème 22 : (:, 2, c) : Un quadrillage rectangulaire comporte 168 carreaux en tout ; il y a 4 carreaux sur la largeur. Combien y a t il de carreaux sur la longueur ?

Problème 23 : (:, di, s) : Un rallye cycliste comporte 105 km ; le départ est à 7 heures le matin ; les relais sont distants de 5 km ; chaque participant doit pointer au départ, à chaque relais, et à l'arrivée. Combien de fois doit-il pointer ?

Problème 24 : (×, di, c) : Un restaurant propose un menu du jour à 70F ; il y a 4 choix possibles pour l'entrée, 3 choix possibles pour le plat principal et 2 choix possibles pour le dessert. Combien de menus différents peut-on constituer ?

Annexe 2 : exemples d'activités de calcul mental proposées en CM_2, $6^{ème}$ et $5^{ème}$

Cette annexe présente des exemples d'activités de calcul mental proposées dans chaque niveau de classe. Certaines des activités proposées aux élèves de CM2 sont reprises en $6^{ème}$, voire en $5^{ème}$. Les domaines numériques changent toutefois selon le niveau de la classe considérée.

Exemples d'activités de calcul mental, niveau CM_2

Jeux de mémoire visuelle ou auditive

Mémoriser des nombres seulement écrits ou énoncés ; les restituer tels quels ou avec un traitement numérique (ranger dans l'ordre croissant ou décroissant, ajouter ou enlever 1, 10, multiplier ou diviser par un nombre donné…).

Jeu du furet

Compter, décompter de n en n (n entier à un, deux, ou trois chiffres) ; cas particulier des multiples de n (en particulier n = 10) ou de n décimal. L'activité est collective et orale. Le professeur interroge les élèves à tour de rôle dans un ordre quelconque. Un certain rythme doit être maintenu pour amener les élèves à calculer rapidement.
Il s'agit par exemple de compter de 9 en 9 à partir de 7, de 13 en 13 à partir de 4 ou de décompter de 8 en 8 à partir de 123, de 14 en 14 à partir de 246, etc.

Jeux de portrait

Plusieurs modalités possibles :

- Le professeur choisit un nombre. Les élèves posent des questions pour le trouver auxquelles il n'est répondu que par oui ou par non.
- Le professeur fait le portrait d'un nombre. Les élèves doivent le trouver ; il peut y avoir plusieurs solutions possibles. Exemple : je suis entre 600 et 700 ; mon chiffre des dizaines est 8 ; mon chiffre des unités est la moitié de mon chiffre des dizaines des unités est plus petit que celui des dizaines.
- À partir d'une liste de nombres écrite au tableau, le professeur fait le portrait d'un des nombres. Les élèves doivent le trouver à partir des informations données. Exemple : les nombres écrits au tableau sont : 27, 35, 55, 75, 54, 135, 202, 88. Le nombre cherché n'a pas trois chiffres, il se termine par 5, le chiffre des unités n'est pas le même que celui des dizaines, le chiffre des unités est plus grand que le chiffre des dizaines.

Jeu du nombre caché

Le professeur choisit un nombre. Les élèves doivent le trouver en proposant des nombres. Le professeur répond « trop grand » ou « trop petit » (le maître peut proposer au départ un intervalle dans lequel il choisit son nombre).

Jeu de la chaîne

À partir d'un nombre de départ, on applique des transformations successives (+, -, ×), il faut trouver le résultat final.

Le nombre pensé

L'inconnue peut être le nombre de départ ou le nombre d'arrivée. Exemple : «*je pense à un nombre ; je lui enlève 76 et je trouve 47 ; à quel nombre ai-je pensé ? .*»

Si l'inconnue est la règle, le jeu devient celui de la règle pensée: on donne 2 ou plusieurs couples de nombres ; il faut trouver la règle sous-jacente.
La règle peut être ajouter n, enlever n, multiplier ou diviser par n, ou une combinaison de deux de ces règles. Exemple : x --->3x + 5 ou x ---> 2x -1.

Le compte est bon ; cas particulier : objectif zéro

Il s'agit d'atteindre (ou de se rapprocher le plus possible) d'un nombre cible à partir de quatre nombres donnés en les combinant avec les 4 opérations.

La conjecture de Syracuse

On part d'un nombre n ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. On arrive toujours à 1.

Exemple : 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

Vrai ou faux ?

Avec la moitié, le double, le tiers, le quart… Exemple : la moitié de 700 est 350, vrai ou faux ?

Activités en liaison avec la numération

- *Ecrire en chiffres les nombres* : 4033, 42 dizaines et 5 unités, 80 centaines, 150 dizaines…
- *Nombre de dizaines, centaines, unités de mille* : combien y a-t-il de dizaines dans 546, de centaines dans 1758, d'unités de mille dans 145000…
- *Encadrement* : encadre le nombre 981 par les deux multiples de 10 les plus proches, par les deux multiples de 100 les plus proches…
- *Cas des nombres décimaux* :
    - Passer d'une écriture à une autre (écriture à virgule, fractionnaire, sous la forme « 7 unités et 61 centièmes ») ; en particulier décomposer un nombre décimal en utilisant l'entier immédiatement inférieur : 36,07=36+0,07 ou 36,07=36+7/100.
    - Compléments à l'unité supérieure de nombres ayant un chiffre après la virgule : de 7,2 à 8 ou de 9,5 à 10…
    - Encadrer un décimal entre deux entiers consécutifs.
    - Encadrer un décimal entre deux décimaux : « encadrer le nombre 3,05 par deux nombres s'exprimant en dixièmes ».
    - Intercaler un décimal entre deux décimaux.

Multiplication par une puissance de 10

178 × 10   17 × 1000   5000 × 10   30000 : 10   400000 : 1000 ...

Additions et soustractions mentales

- Calculer des sommes ou des différences du type : 300 + 60, 360 - 60, 2000 + 42 en liaison avec la numération « parlée ».
- Ajouter ou soustraire un nombre entier (inférieur à 10) d'unités, de dizaines, de centaines, de milliers…à un nombre quelconque : 76 + 3, 385 + 50, 525 - 30…
- Ajouter ou soustraire des nombres entiers : 31 -18 ; 450 -180 ; 2600 + 1400 ; 39 + 45
- 60 - 26   119 + 36   83 - 49   ...
- calculer des sommes de plusieurs nombres entiers en regroupant des termes « qui vont ensemble » : 47 + 180 + 60 + 53 + 20.
- Calculer des sommes ou des différences de nombres décimaux dans des cas simples : 5,6+2,4 ; 7,2-2,5, etc…

- Complément d'un nombre décimal ayant 2 chiffres après la virgule au nombre entier immédiatement supérieur : complément à 1 de 0,45.
- Ecrire plusieurs différences égales : 958 - 792 = 968 – 802 =…
- Compléments à 10, 100, 1000…, aux dizaines ou centaines supérieures : compléments de 430 à 500 puis de 2430 à 2500.
- Connaître les relations additives entre multiples de 25 inférieurs à 100 ou multiples de 250 inférieurs à 1000 : 75 = 50 + 25 ; 1000 – 750 = 250.
- Connaître quelques relations entre certains nombres entiers et décimaux :
  2,5 + 2,5 = 5 ; 7,5 + 7,5 = 15.

Multiplications et divisions mentales

32×5 32×25 28×9 34×11 ...
158 : 2 305 : 5 549 : 9 568 : 8 ...

Produits égaux

- Déterminer différentes écritures d'un même nombre sous la forme d'un produit de 2 facteurs.
- déterminer si plusieurs écritures multiplicatives sont égales sans les calculer explicitement (ex : 8×36 et 12 ×× 24).
- utiliser la décomposition d'un nombre en produits de facteurs pour calculer mentalement des produits (ex : $18 \times 36 = 2 \times 9 \times 9 \times 4 = 81 \times 8 = 648$).

Problèmes à résoudre mentalement

- La distance entre deux arrêts successifs d'un autobus est d'environ 1500 mètres ; au premier arrêt 10 personnes montent, au second arrêt 3 personnes descendent, au troisième arrêt 5 personnes montent. Y a t il plus ou moins de personnes dans l'autobus quand il repart après ce troisième arrêt ? Combien en plus ou en moins ?
- Un quadrillage rectangulaire comporte 168 carreaux en tout, il y a 4 carreaux sur la largeur, combien y a-t-il de carreaux sur la longueur ?
- Un restaurant propose un menu du jour à 70 F. Il y a 4 choix possibles pour l'entrée, trois choix possibles pour le plat principal et 2 choix possibles pour le dessert. Combien de menus différents peut-on constituer ?
- Avec ses bottes de 7 lieues, le Petit Poucet se déplace de ville en ville ; il fait des pas de 8 km. S'il parcourt 50 km, combien de pas va-t-il faire ?

Exemples d'activités de calcul mental, niveau sixième

Il s'agissait notamment de reprendre les activités exposées ci-dessus en étendant le domaine numérique fréquenté. Citons notamment :

Compter, décompter

- Compter de 0,3 en 0,3 à partir de 7,2 ;
- Décompter de 0,3 en 0,3 à partir de 7,2.

Ordre de grandeur

- Donner une valeur approchée de $0,195 \times 4,11$; de $0,294 \times 0,4$;
- Le quotient de la division 9675 : 43 est-il de l'ordre de 2, 20 ou 200 ?
- Ordre de grandeur de $21,7 \times 39$, à l'unité près.
- Des deux fractions 5/7 et 7/5, laquelle est plus petite que 1 ?

Opérations mentales

407,8 - 100   407,8 - 10   407,8 - 0,1   407,8 - 1/100

Calcul rapide sur les fractions

$1/9 \times 3/5$ $2/7 \times 3/4$ 23,5 + 4/100   ...

Donner quatre écritures différentes de 35/8 en utilisant les signes +,-,×.

Problèmes à résoudre mentalement

- J'achète 48 bonbons à 0,80 F l'un. J'ai 24 F. Ai-je assez ? J'ai 50 F. Ai-je assez ?
- J'ai 18 F dans mon porte-monnaie. Combien au maximum puis-je acheter de sucettes coûtant 1,50 l'une ?
- 2 groupes montent dans un car. Il y a 30 personnes dans le premier groupe, le nombre de personnes du deuxième groupe est égal au 2/3 de celui du premier. Combien de personnes sont montées ?
- On sait que deux élèves sur trois ont plus de 12 au contrôle. Donner 3 exemples de classes, en indiquant pour chacune le nombre total d'élèves et le nombre d'élèves ayant eu plus de 12 au contrôle.

3. Exemples d'activités de calcul mental, niveau cinquième

De même, certaines des activités précédentes sont reprises dans le cadre du domaine numérique fréquenté en $5^{ème}$. Citons par exemple :

Ordre de grandeur d'un résultat

$73 \times 10,2$ 4731,4 + 5036   1000,3 - 218

Priorité des opérations, énoncé de problème

- Effectue $200 + 4 \times 30$.
- Invente un problème qui se résout par ce calcul.

Travail sur les fractions

- - Ecris sous forme d'un entier le plus grand possible plus une fraction : 3/2   14/3
- - Donne une autre écriture fractionnaire de : 4/6   7/3
- - Ecris en ordre croissant : 4/5   2/5   7/4   7/5
- - Ecris une fraction égale à : 0,25   1,2
- Ecris si possible un nombre décimal égal, sinon la valeur approchée à 0,01 près de 3/2   3/4   2/3
- Effectue :

  3/7 + 5/7   1 - 7/9   2 + 3/5

  $6 \times 7/3$ $2/5 \times 4/5$ $2/7 \times 3/4$

Problèmes à résoudre mentalement

- Julien a eu 30 sur 40 au premier devoir et 20 sur 30 au deuxième. Quelle est la meilleure note ?
- Huit garçons et quatre filles mangent chacun un petit pain au chocolat à 2,50 F pièce. Combien les enfants ont-ils dépensé en tout ?
- Un rectangle a une longueur de 8 cm et une largeur de 6 cm, un autre rectangle a une longueur de 17 cm et une largeur de 15 cm. Leurs côtés sont-ils proportionnels ?
- Un pull valait 200 F. Combien vaut-il après une augmentation de 25% ?

Après 20% de réduction, un livre coûte 40 F. Combien coûtait-il avant la réduction ?