Version auteur (preprint) de : TEMPIER, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves, *Grand N*, *98*, 67-90.

COMPOSER ET DECOMPOSER : UN REVELATEUR DE LA COMPREHENSION DE LA NUMERATION CHEZ LES ELEVES

Frédérick TEMPIER

frederick.tempier@u-cergy.fr

LDAR (EA4434), UA, UCP, UPD, UPEC, URN, Université de Cergy-Pontoise

Résumé Les types de tâches « composer » et « décomposer » occupent une place importante dans l'apprentissage de la numération. Ils sont utilisés ici pour faire un état des lieux des connaissances des élèves : dans un premier temps, par une étude des résultats obtenus à des évaluations proposées de la fin du cycle 2 (classe de CE2) jusqu'au début du cycle 4 (classe de $5^{ème}$), dans un second temps, par une étude des techniques et justifications mobilisées par cinq élèves de fin de CM1 mettant en évidence leur interprétation de l'écriture en chiffres. Ces résultats amènent, dans la conclusion, à pointer certaines conditions pour une utilisation adaptée des compositions et décompositions dans l'enseignement de la numération.

L'apprentissage des nombres entiers à l'école primaire est l'objet d'études en didactique des mathématiques depuis de nombreuses années (par exemple Bednarz 1984) mais son intérêt au niveau de la recherche semble renouvelé autant en France (Chambris 2012, Mounier 2012, Tempier 2013) qu'à l'international comme en témoigne l'étude[1] consacrée aux nombres entiers à l'école de la Commission Internationale de l'Enseignement des Mathématiques (ICMI) qui s'est tenue en 2015. Elle connait également un regain d'intérêt au niveau des politiques éducatives en France. En effet, d'une part, la numération a fait l'objet d'une conférence de consensus[2] en novembre 2015 organisée par le Conseil National de l'Evaluation du système scolaire (CNESCO) qui a permis de faire un point sur certains résultats de recherche en didactique des mathématiques et psychologie des apprentissages. Il apparait notamment que certaines difficultés des élèves rencontrées à l'entrée en sixième sur les grands nombres ou les nombres décimaux pourraient avoir pour origine une construction insuffisante des nombres entiers d'usage courant (inférieurs à dix-mille). Cette hypothèse est notamment étayée par l'intervention de Desmet (2015) qui rappelle que la connaissance des nombres entiers est un meilleur prédicteur de réussite pour les décimaux que celle des fractions. D'autre part, les programmes de 2016 donnent une place importante à la numération des entiers et présentent explicitement les deux aspects de la numération, aspects positionnel et décimal, comme des enjeux essentiels dès le cycle 2 : « unités de numération (unités simples, dizaines, centaines, milliers) et leurs relations (principe décimal de la numération en chiffres) » et « valeur des chiffres en fonction de leur rang dans l'écriture d'un nombre (principe de position) ». Au cycle 3, le travail sur les grands nombres « permet d'enrichir la compréhension de notre système de

[1] http://www.umac.mo/fed/ICMI23/

[2] http://www.cnesco.fr/fr/conference-de-consensus-numeration/

numération » et « une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dixièmes, centièmes... ».

Cette nouvelle orientation des programmes s'appuie notamment sur la préconisation d'un travail sur les compositions et décompositions en unités de numération en cycle 2 comme en cycle 3. Nous avions déjà identifié ce type de tâches comme particulièrement important dans l'enseignement de la numération, malgré sa disparition dans le texte des programmes de 2008. Il est susceptible de mettre en jeu conjointement les deux principes de la numération (Tempier 2010) et il est aussi mobilisé dans d'autres domaines des mathématiques comme le calcul. Le travail sur ces types tâches n'est cependant pas, en soi, suffisant pour permettre aux élèves de comprendre le fonctionnement de notre système de numération écrit. Par exemple ils peuvent réussir à juxtaposer le 3, le 2 et le 5 de 3 centaines 2 dizaines 5 unités pour le composer en 325 sans mobiliser une réelle compréhension des savoirs de la numération. Et il en est de même pour la composition de 32 dizaines et 5 unités en 325, qui peut être réussi sans mobiliser la relation entre dizaines et centaines.

Ceci pose des questions à la fois pour l'utilisation de ces tâches pour l'enseignement pour qu'elles soient utiles à l'appropriation des principes de la numération écrite, mais aussi pour l'évaluation des connaissances des élèves. L'objectif de cet article est de faire un point sur certains acquis et difficultés des élèves à propos des nombres entiers en fin de cycle 2 ainsi qu'au cycle 3 en appui sur ces deux types de tâches. Nous commencerons dans une première partie par en faire une analyse, en lien avec les savoirs mathématiques de la numération qu'elles peuvent permettre de travailler. Ceci permettra d'identifier certaines variables essentielles et servira de point d'appui pour la deuxième partie où nous chercherons à faire un état des lieux des connaissances des élèves (approche quantitative) pour ces types de tâches en début de CE2, puis du CM1 à la classe de 5ème. Nous terminerons dans une troisième partie par une étude plus fine des techniques mobilisées par cinq élèves de fin de CM1 (approche qualitative) après un enseignement conséquent des compositions et décompositions afin de préciser les connaissances mobilisées par les élèves dans ces types de tâches.

Composer et décomposer un nombre selon différentes unités

Pour commencer nous rapportons brièvement deux observations personnelles de séances où sont travaillées respectivement la composition du nombre 12 centaines 11 dizaines 2 unités pour la première, et la décomposition du nombre 2153 pour la deuxième.

Dans la première classe, les élèves rencontrent des difficultés pour composer le nombre proposé liées au fait d'avoir un nombre d'unités supérieur à dix à gérer (12 centaines et 11 dizaines). L'enseignant les encourage alors à utiliser à la fois les étiquettes $\boxed{1}$, $\boxed{10}$ et $\boxed{100}$ qu'ils ont sur leur table et la comptine numérique orale. Par exemple en comptant ainsi : cent, deux-cents, …, mille-deux-cents, mille-deux-cent-dix, etc., ils peuvent obtenir le nombre mille-trois-cent-douze puis l'écrire en chiffres. Ceci ne permet pas d'apprendre la relation entre 10 centaines et 1 millier, ni celle entre 10 dizaines et 1 centaine.

Dans la deuxième classe la tâche[3] proposée consiste à déterminer le nombre de paquets de 100 perles, de 10 perles et de perles toutes seules nécessaires pour réaliser un collier de 2153 perles. Pour vérifier la réponse d'un élève qui propose 12 paquets de 100 l'enseignante met en avant la règle de multiplication par 100 : « les deux zéros qui sont là je les ai remis là » tout en repassant au tableau en rouge au fur et à mesure (en gras ici) les zéros ajoutés : 12×1**00** = 12**00**. Dans le premier cas, la technique mise en avant s'appuie sur une règle liée à la suite orale des nombres : *la règle de succession des nombres dans la suite orale, de un en un, dix en dix, et cent en cent* qui ne met pas en jeu directement les relations entre unités ; par exemple le passage de « neuf-cents » à « mille » ne nécessite pas la connaissance de la relation 10 centaines = 1 millier. Dans le deuxième cas, le passage au millier est pris en charge par la règle de multiplication par 100 : *écriture de deux zéros à droite du nombre (« règle des zéros »)*. La relation entre centaines et milliers est alors invisible dans la classe.

L'objectif de cette première partie est d'apporter un éclairage sur les liens possibles entre les types de tâches composer et décomposer et les savoirs de la numération. La connaissance de ces liens peut permettre de faire des choix avisés d'utilisation de ces types de tâches en lien avec les savoirs à institutionnaliser. Cet éclairage nous servira également de point d'appui pour la conception des évaluations et l'analyse des réponses des élèves dans les parties suivantes.

Nous utilisons la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1999) pour décrire l'activité mathématique en termes d'organisation mathématique qui s'organise autour de *types de tâches* et de *techniques* (savoir-faire) d'une part et *technologies* et *théories* (savoirs) d'autre part. Une technique est une manière de réaliser un type de tâche et une technologie est un discours sur la technique qui permet de l'expliquer ou de la justifier. Nous nous appuyons également sur les analyses épistémologiques et praxéologiques de la numération de Chambris (2012).

Les types de tâches composer et décomposer peuvent se décliner principalement selon deux cas correspondant à des écritures différentes : en unités de numération (unités, dizaines, centaines, …) comme par exemple *3 centaines 2 dizaines 1 unité = 321* ou en puissances de dix (1, 10, 100, 1000, …) ce qui peut donner lieu à des écritures additives (*300 + 20 + 1 = 321*) ou multiplicatives et additives (*3×100 + 2×10 + 1 = 321*).

Nous considérons principalement dans cet article le cas avec unités de numération. Nous faisons en effet l'hypothèse, appuyée sur les travaux de Chambris (2012), de l'intérêt de l'articulation de trois systèmes de désignation des nombres, les nombres écrits en chiffres, les nombres parlés et les nombres en unités (Houdement & Tempier 2015) pour mieux comprendre le système de numération décimal de position, les techniques de calcul et le système métrique.

Dans cet article *composer un nombre* consiste donc à passer d'une écriture en unités de numération à une écriture en chiffres (par exemple 3 centaines 2 dizaines 1 unité = 321) et *décomposer un nombre selon différentes unités* est la tâche inverse, c'est-à-dire passer d'une écriture en chiffres à une écriture en unités de numération (par exemple 321 = 3 centaines 2 dizaines 1 unité).

[3] Ce problème est issu du manuel Cap Maths CE1 (Hatier 2006). Il s'agit de la première rencontre avec les nombres supérieurs à mille en fin de CE1.

Deux cas de compositions et décompositions sont envisagés ci-dessous : *canoniques* et *non canoniques*. Pour chacun de ces cas nous proposons une technique dite *de référence*, qui est une technique dont l'explication (la technologie) s'appuie directement sur les principes de la numération. Ces techniques de référence sont donc des points d'appui essentiels dans l'enseignement pour permettre l'institutionnalisation des savoirs de la numération.

Le cas des compositions et décompositions « canoniques »

Considérons pour commencer le cas des compositions et décompositions *canoniques*, c'est-à-dire pour lesquelles le nombre d'unités[4] de chaque ordre est inférieur ou égal à 9. Le principe de position permet alors une association directe de l'écriture chiffrée et de l'écriture en unités, comme l'illustrent les exemples ci-dessous (tableau 1).

	Composer un nombre à partir de plusieurs unités	**Décomposer un nombre selon différentes unités**
Exemple de tâche	Ecrire en chiffres le nombre 2 milliers 4 dizaines 5 unités	Ecrire le nombre 2045 en milliers, centaines, dizaines et unités.
Une technique de référence	Ecrire le nombre de milliers (quatrième rang à partir de la droite), marquer l'absence de centaine par l'écriture d'un 0 au 2ème rang, etc. (il est aussi possible de faire dans l'autre sens : des unités vers les milliers).	Le quatrième chiffre (en partant de la droite) donne le nombre de milliers, le troisième le nombre de centaines, etc. (il est aussi possible de faire dans l'autre sens : des unités vers les milliers).
Savoirs associés	Principe de position de la numération : les unités s'écrivent au premier rang de l'écriture chiffrée (à partir de la droite), les dizaines au deuxième rang, les centaines au troisième rang, etc. On marque l'absence d'unité isolée d'un certain ordre par l'écriture d'un 0.	

Tableau 1 : exemples de compositions et décompositions canoniques

D'autres techniques de compositions sont possibles comme le passage par le nom du nombre : traduction de 2 milliers 4 centaines 5 unités en deux-mille-quatre-cent-cinq puis écriture en chiffres de ce nombre. Une autre technique, appelée positionnelle, consiste à écrire des zéros pour obtenir une écriture en unités simples (2 milliers = 2000 et 4 centaines = 400) puis à composer le nombre obtenu (2000 + 400 + 5) en « positionnant » de manière adéquate les chiffres non nuls ou en additionnant. Ces deux techniques peuvent être expliquées et justifiées à l'aide de la technique de référence (voir aussi Chambris 2012). Elles s'appuient sur les mêmes savoirs, mais de façon moins « visible ». Même si elles permettent de produire les mêmes résultats, leur valence épistémique (Artigue 2004) pour l'apprentissage du fonctionnement des règles de la numération écrite est plus faible. Il en est de même pour les techniques de décompositions.

Les cas non canoniques. Mise en jeu des relations entre unités.

Le nombre d'unités de certains ordres peut être supérieur ou égal à 10. L'utilisation stricte du principe de position ne suffit pas car il faut une écriture ayant au plus 9 unités à chaque

[4] Deux sens différents sont utilisés dans ce texte pour le mot unité : il s'agit parfois d'une unité particulière, l'unité simple, et parfois de l'unité au sens général qui peut être l'unité simple, la dizaine, la centaine, etc.

ordre. Cette condition s'obtient en réalisant des conversions entre unités comme l'illustre le tableau 2.

	Composer un nombre à partir de plusieurs unités	**Décomposer un nombre selon différentes unités**
Exemple de tâche	Ecrire en chiffres le nombre 5 unités 64 centaines 2 milliers	Ecrire le nombre 8405 en unités et centaines.
Une technique de référence	Convertir les unités pour lesquelles il y a plus de 10 unités : 64 centaines = 6 milliers et 4 centaines. Ajouter les unités de même ordre 6 milliers et 2 milliers. On est alors ramené au cas avec moins de 9 unités … (cf. tableau 1).	Décomposer de manière canonique (comme dans le tableau 1) : 8 milliers 4 centaines 5 unités. Convertir les milliers en centaines (8 milliers = 80 centaines) et ajouter les centaines (84 centaines).
Savoirs associés	Les relations entre unités (principe décimal de la numération) pour les conversions : 1 millier = 10 centaines, etc. Principe de position et rôle du 0 (cf. tableau 1).	

Tableau 2 : exemples de compositions et décompositions avec plus de dix unités à certains ordres

Pour ces tâches d'autres techniques de compositions sont aussi possibles. Le passage par le nom du nombre ne peut se faire directement car on ne peut dire « soixante-quatre-cent ». La technique positionnelle peut être utilisée en écrivant des zéros à droite du rang des centaines (64 centaines = 6400) puis en recomposant le nombre comme dans une addition posée en ajoutant les chiffres du même rang. Il en est de même de la technique de calcul utilisant la multiplication par 100 (8405 = 84×100). La technique de référence et les savoirs associés (les deux principes de la numération) permettent ici encore d'expliquer et de justifier ces techniques. Il en est de même pour les techniques de décompositions. Signalons par exemple que le « découpage » de l'écriture chiffrée au rang des centaines permettant de décomposer 8405 en 84 centaines 5 unités s'appuie sur la relation entre milliers et centaines et se justifie par la technique de référence.

Une tâche plus générale : convertir entre unités de numération

Chambris (2012) définit les conversions comme des changements d'unités de numération, comme par exemple « convertir 8 milliers en centaines ». Les compositions et décompositions peuvent alors être considérées comme des déclinaisons de conversions pour lesquelles les unités simples sont présentes à l'arrivée (compositions) ou au départ (décomposition). Par exemple décomposer 8405 en centaines et unités revient à convertir 8405 unités (simples) en centaines et unités. Composer 5 unités 64 centaines 2 milliers revient à convertir ce nombre en unités simples (8405 unités). Ce point de vue plus général permet de mieux comprendre les liens entre certaines tâches de numération et d'autres tâches mathématiques, notamment les conversions d'unités dans le système métrique (Chambris 2012).

Les compositions et décompositions dans l'apprentissage de la numération

En considérant l'articulation entre nombre écrit en chiffres, nombre parlé et nombre en unités comme un élément essentiel dans l'apprentissage de la numération, nous faisons des types de tâches *composer* et *décomposer* un point d'appui central dans cet apprentissage. Ils permettent en effet d'apporter des justifications à des techniques de dénombrement d'une collection ou d'association d'un nombre écrit en chiffres à un nombre parlé (dit ou écrit en lettres) qui sont des tâches couramment utilisées dans l'étude des nombres entiers.

La figure 1 schématise les liens entre ces différentes représentations en lien avec les quantités correspondantes (collections). Les types de tâches de composition et décomposition y apparaissent dans le passage du nombre écrit en chiffres au nombre en unités (à l'oral ou à l'écrit : 3 milliers 2 centaines 7 unités ou « trois milliers deux centaines sept unités). Les flèches pleines constituent des types de tâches couramment travaillés en numération. Les flèches en pointillés montrent les savoirs en jeu qui accompagnent le passage par les unités de numération.

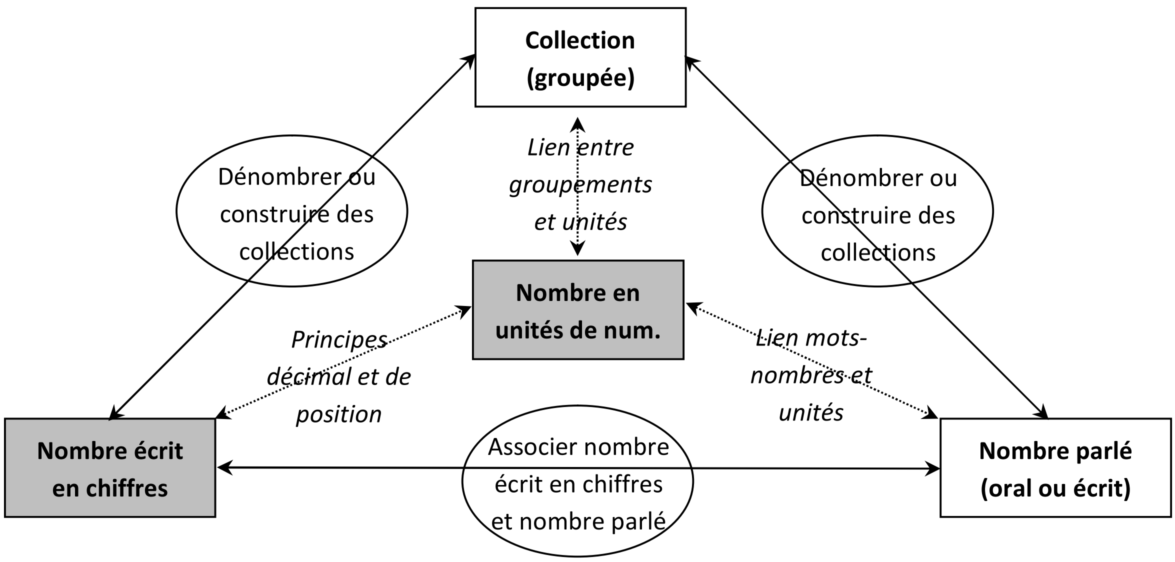

Figure 1 : Liens entre collection, nombre écrit en chiffres, nombre parlé et unités.

Pour associer un nombre écrit en chiffres à un nombre parlé, l'écriture ou la lecture en unités (Chambris 2012) peut être un intermédiaire en utilisant les correspondances milliers/mille (quatre milliers se dit quatre-mille par exemple, mais un millier se dit mille), centaines/cent, etc. Par exemple 3207 se dit « trois-mille-deux-cent-sept » car 3207 = 3 milliers 2 centaines 7 unités = trois-mille-deux-cent-sept. La désignation en unités constitue une régularisation de notre système oral (Houdement & Tempier 2015), même si ce n'est pas aussi simple pour les nombres inférieurs à cent. Les compositions et décompositions apparaissent alors comme une tâche intermédiaire dans ce passage entre numération écrite et parlée qui permet de justifier l'écriture en chiffres d'un nombre parlé ou réciproquement.

Dans une situation de dénombrement d'une collection où on cherche à produire une écriture en chiffres de la quantité, si la collection est déjà plus ou moins groupée en paquets de dix, cent et mille, il est possible d'associer chaque groupement à différentes unités (chaque élément isolé à une unité, les paquets de dix à des dizaines et les paquets de cent à des centaines, etc.). Cette modélisation permet de se ramener à une tâche de composition (par exemple 7 unités 2 centaines 3 milliers). La tâche inverse de construction d'une collection à partir d'un nombre donné amène, elle, à utiliser une décomposition de ce nombre : par exemple construire une collection de 3207 revient à chercher 3 milliers 2 centaines 7 unités dans les groupements disponibles pour constituer la collection.

Les compositions et décompositions en unités de numération constituent donc des points d'appui pour justifier des techniques pour réaliser certaines tâches[5] essentielles dans l'étude des nombres et donc pour institutionnaliser les savoirs de la numération lors de leur rencontre.

Lien avec d'autres notions mathématiques

D'autres tâches mathématiques, hors du domaine de la numération, amènent à utiliser des compositions et décompositions qui constituent ici aussi des points d'appui pour justifier certaines techniques. Les domaines concernés sont ceux du calcul (mental ou posé) et des grandeurs et mesures. Les compositions et décompositions de nombres décimaux permet d'étendre les connaissances construites sur les entiers à l'écriture décimale.

Nous avons déjà montré comment les techniques de calcul posé s'appuient sur les connaissances de numération (Tempier 2010). Rappelons, par exemple, que dans l'addition posée de 593 + 345, les justifications de l'alignement vertical des chiffres et de la retenue peuvent s'appuyer sur la décomposition en 5c 9d 3u + 3c 4d 5u, la conversion de 13d en 1c 3d et la recomposition de 9c 3d 8u en 938.

Pour le calcul mental les connaissances de numération permettent aussi de faire des décompositions et recompositions adaptées au calcul à effectuer. Par exemple ajouter 80 à 345 peut être réalisé en appui sur la décomposition de 345 en 34d 5u, suivi de l'ajout de 8d et de la recomposition de 42d 5u en 425.

Enfin, l'explication des liens entre compositions et décompositions en numération et conversions d'unités du système métrique est très détaillée dans Chambris (2012). Rappelons par exemple que pour convertir (ou décomposer) 427 cm en m, dm et cm, il est possible de s'appuyer sur le fait que :

> « Dans 427 cm, le 7 en première position indique des unités, donc des centimètres ; le 2, en 2e position indique des dizaines de centimètres (donc des décimètres) ; le 4 en 3e position indique des centaines de centimètres (donc des mètres). Donc, 427 cm = 4 m 2 dm 7 cm » (p.20).

Enfin les compositions et décompositions trouvent leur prolongement dans l'apprentissage des nombres décimaux où elles permettent de travailler le lien entre l'écriture décimale (à virgule) et celle des fractions décimales. Par exemple 32,07 peut se décomposer de manière canonique 32 unités 7 centièmes mais aussi 3207 centièmes, etc. Les principes de la numération s'étendent des entiers aux décimaux : les relations entre unités s'enrichissent avec l'introduction des dixièmes, centièmes, etc. et la virgule permet de repérer la position des unités simples et donc celle des dixièmes (1er rang à droite de la virgule), centièmes, etc.

---

[5] Nous l'avons montré pour le dénombrement et la construction de collections ainsi que pour l'association du nombre écrit au nombre parlé. Mais ceci est aussi vrai pour d'autres tâches comme la comparaison ou le rangement de nombres ou le passage par une décomposition de chaque nombre permet de justifier la comparaison (3204 > 3124 car 32 centaines > 31 centaines par exemple).

L'analyse des types de tâches *composer* et *décomposer* montre donc des possibilités pour faire apprendre aux élèves le fonctionnement de notre système de numération, que ce soit dans l'étude des nombres ou à l'occasion de leur rencontre en lien avec d'autres domaines. Nous allons maintenant nous intéresser aux connaissances de numération des élèves et à l'usage de ces types de tâches pour révéler certaines de ces connaissances. Nous commençons par une approche quantitative permettant de se donner un aperçu général des connaissances des élèves relatives à ces types de tâches.

II. Approche quantitative : les réussites et difficultés des élèves pour composer et décomposer

Nous avons proposé une fiche d'évaluation (cf. annexe 1) à des enseignants de CE2 en fin de première période afin d'évaluer les connaissances de leurs élèves sur les nombres à trois chiffres, avant qu'ils n'aient abordé dans leur classe les nombres à quatre chiffres. L'évaluation porte sur les types de tâches suivants : associer l'écriture en chiffres et en lettres, comparer deux nombres, composer, déterminer le *nombre de* (cas particulier de décomposition) et convertir. Tous les enseignants ont fait des révisions sur la numération des nombres à trois chiffres durant cette première période. Le nombre d'élèves ayant passé l'évaluation diffère selon les exercices, entre 103 et 187 élèves.

Connaissances sur les nombres à trois chiffres en début de CE2

Les réussites des élèves aux tâches d'association de l'écriture en chiffres à celle en lettres et de comparaison de nombres sont importantes (respectivement 89% et 95% sur chacun de ces exercices pour 127 élèves et 187 élèves évalués). Les résultats sont beaucoup plus hétérogènes concernant la composition de nombres.

Composer un nombre : écriture en unités vers écriture en chiffres

1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = …	**91%**	2 dizaines + 15 unités = …	**41%**
8 dizaines + 2 centaines + 5 unités = …	**78%**	4 centaines + 10 dizaines = …	**32%**
6 centaines + 9 unités = …	**65%**	5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = …	**39%**
7 unités + 4 centaines = …	**63%**	21 dizaines + 3 centaines = …	**21%**
3 dizaines + 6 centaines = …	**52%**	6 centaines + 21 dizaines + 14 unités = …	**17%**

Tableau 3 : exercice de composition, pourcentages de réussite pour 127 élèves
(sauf pour 21 d + 3 c où seulement 103 élèves ont été évalués).

La variabilité des résultats à ces différents items montrent l'influence importante de deux variables : l'ordre de présentation des unités et le nombre d'unités de chaque ordre (absence d'unité, au plus neuf, plus de dix). Les résultats baissent fortement quand des relations entre unités sont en jeu.

Déterminer le nombre de dizaines ou de centaines dans un nombre à trois chiffres : décontextualisé

Le type de tâches de décomposition est évalué sur une tâche particulière qui consiste à déterminer le *nombre de* dizaines ou centaines dans un nombre à quatre chiffres.

Dans 67 il y a ……… dizaines	**70%**
Dans 105 il y a ……… dizaines	**51%**
Dans 260 il y a ……… centaines	**53%**
Dans 400 il y a ……… dizaines	**46%**
Dans 764 il y a ……… dizaines	**39%**

Tableau 4 : exercice « nombre de », pourcentages de réussite pour 103 élèves

Les items où les nombres d'unités cherchés n'ont qu'un chiffre sont les mieux réussis, même s'ils restent difficiles, mais avec une différence entre le cas des dizaines et celui des centaines. Quand il s'agit de déterminer le nombre de dizaines dans un nombre à 3 chiffres les pourcentages de réussite tombent en-dessous de 50%. Beaucoup d'élèves ont écrit le « chiffre des » : par exemple dans 105 il y a 0 dizaine.

Déterminer le nombre de dizaines ou de centaines dans un nombre à trois chiffres : dans un problème en contexte

Le problème suivant a été proposé aux élèves. Ils disposaient d'un espace réservé pour effectuer leur recherche, en-dessous de l'énoncé.

Un directeur d'école a rassemblé les pièces de 1 euro qui ont été récoltées lors de la tombola de la fête de fin d'année. Il a en tout 218 euros. Il va à la banque pour échanger ces pièces contre le plus possible de billets de 10 euros. Combien de billets de 10 euros peut-il obtenir ?
Total des réussites : 30%

Tableau 5 : exercice « nombre de » en contexte, pourcentage de réussite pour 187 élèves

Les résultats sont faibles. Les erreurs relèvent d'une mauvaise représentation du problème ou bien de difficultés dans son traitement :

- des élèves tentent une opération posée ou en ligne comme par exemple 218 + 10 = 228 (ou 218-10=208). Ils en déduisent alors qu'il y a 228 (ou 208) billets de 10 ou bien ne concluent pas (peut-être ont-ils conscience du problème d'ordre de grandeur).
- Des élèves dessinent des billets de 10 ou écrivent des additions itérées de 10 (10 + 10 + 10 + …) et comptent (on peut le supposer) jusqu'à « deux-cent-dix ». Ils ne dessinent pas de paquets donc on peut penser qu'ils n'effectuent pas de conversion (ou d'échange en billets de cent). Cette procédure est correcte mais certains élèves font des erreurs dans la conclusion : confusion entre le nombre de billets et le montant total en euros, comme par exemple « il faut 210 billets ».

Très rares sont les élèves qui donnent directement la réponse, c'est-à-dire sans faire de dessin ou de calcul. Cette façon de faire pourrait témoigner de l'utilisation de la technique de troncature (lecture directe du nombre de dizaines dans l'écriture chiffrée). La présence du cadre pour la recherche a peut-être amené les élèves, par effet de contrat, à considérer qu'il fallait faire un dessin ou une opération.

Convertir des unités de numération

L’évaluation contenait également une tâche de conversion entre unités de numération afin d’évaluer les connaissances des élèves relatives aux relations entre unités.

5 dizaines = ……… unités	55%
80 unités = ……… dizaines	55%
1 centaine = ……… dizaines	49%
3 centaines = ……… unités	37%
60 dizaines = ……… centaines	31%

Tableau 6 : exercice de conversion entre unités, pourcentages de réussite pour 128 élèves

Cette tâche pose d’importantes difficultés aux élèves. Les différences entre les premiers et les derniers items permettent de dire que la relation entre dizaines et centaines est moins maîtrisée que celle entre unités et dizaines, ce qui n’est pas une surprise. On peut par contre être étonné de la faible réussite à la conversion de 3 centaines en unités simples. Il pourrait être moins courant de demander de déterminer un « nombre d’unités » qu’un nombre de dizaines ou centaines.

Connaissances sur les nombres à trois et quatre chiffres du CM1 à la 5ème

Afin de se donner une idée de l’évolution dans le temps des connaissances des élèves, nous avons proposé une deuxième évaluation à des élèves du CM1 à la 5ème, dans le cadre d’un travail dans un groupe de l’inspection académique de la Charente[6]. Elle porte sur certains types de tâches identiques mais pour des nombres à 3 ou 4 chiffres. Le nombre d’élèves de chaque niveau varie entre 74 et 159, pour un total de 475 élèves. Voici les résultats obtenus.

Niveau de classe (nombre d’élèves)	**CM1 (74)**	**CM2 (108)**	**6ème (159)**	**5ème (134)**
8 dizaines + 2 centaines + 5 unités = ……..	95%	90%	81%	87%
3 dizaines + 6 milliers = ………….	70%	73%	73%	84%
4 centaines + 32 dizaines + 8 unités = ………	54%	56%	36%	31%
267 = … dizaines … unités	73%	80%	70%	66%
1052 = … centaines … unités	59%	67%	59%	63%
5 centaines = ……… unités	73%	84%	80%	73%
3 centaines = ……… dizaines	73%	87%	81%	80%
40 centaines = ……… milliers	42%	65%	43%	50%

Tableau 7 : pourcentages de réussite du CM1 à la 5ème

La comparaison avec la première évaluation montre que pour les nombres jusqu’à mille, les résultats sont ici meilleurs que ceux des élèves de début de CE2.

---

[6] La mise en place de ces évaluations dans les écoles et collèges et le recueil des résultats ont été organisés par Sébastien Moisan et Hervé Grégoire.

Pour les compositions (items 1 à 3), on retrouve toutefois les variations de résultats en fonction du nombre d'unités de chaque ordre (absence, plus de dix). Les résultats varient peu du CM1 au CM2 mais il y a une baisse en début de collège pour le cas avec plus de dix unités. Les décompositions non canoniques (items 4 et 5) posent des difficultés importantes en CM1. La réussite est meilleure en CM2 avant une légère baisse au début de collège. Enfin, les conversions entre unités sont mieux réussies qu'en CE2, avec une augmentation importante du CM1 au CM2 avant une baisse en début de collège.

Conclusion

Les résultats de l'évaluation de début de CE2 montrent une compréhension insuffisante du fonctionnement de la numération écrite chez les élèves. Leurs connaissances ne leur permettent pas de s'adapter aux différents cas de compositions/décompositions proposés dans l'évaluation (absence d'unités ou plus de dix unités à certains ordres). Ceci pourrait témoigner d'une confrontation insuffisante à ces différents cas dans l'enseignement. Ces résultats sont à même d'interroger les connaissances des élèves avant d'aborder le travail sur les nombres à quatre chiffres, alors que les relations entre unités vont se complexifier du fait de l'introduction d'une unité supplémentaire ou de relations entre unités non consécutives comme dizaines/milliers : une bonne partie des élèves ne sont pas dans des conditions favorables pour aborder ce travail. Dans quelle mesure les élèves et les enseignants pourront-ils alors s'appuyer sur les relations entre unités/dizaines/centaines pour travailler les nouvelles relations avec les milliers ?

En CM1 et CM2 les résultats sont meilleurs mais les difficultés liées aux compositions avec plus de dix unités, aux décompositions non canoniques et aux conversions entre unités restent importantes. L'enseignement du début de collège ne permet pas de combler ces lacunes. Et les résultats ne s'améliorent pas vraiment entre la 6$^{\text{ème}}$ et la 5$^{\text{ème}}$, ce qui pourrait être un signe que ces tâches ne sont plus un enjeu d'enseignement à ces niveaux de classe.

III. Approche qualitative : quelles techniques et quelles justifications mobilisées par les élèves ?

Une difficulté importante d'enseignement des compositions et décompositions est le fait que bien souvent les élèves ne laissent pas de trace écrite de leur résolution autre que leur résultat. Ainsi quand un enseignant propose une telle tâche dans sa classe, il peut se retrouver assez vite démuni pour intervenir suite à une erreur ou pour savoir si les savoirs qu'il a prévu d'institutionnaliser sont bien en lien avec les connaissances réellement mobilisées par les élèves.

L'objectif de cette partie est de comprendre les techniques (justes et erronées) mobilisées par les élèves dans les compositions et décompositions. Pour cela nous commencerons par rappeler différentes interprétations de l'écriture chiffrée chez les élèves, puis à partir des résultats des évaluations de la partie précédente nous ferons des hypothèses sur l'origine de certaines erreurs faites par les élèves et nous terminerons par une étude de cas de cinq élèves de CM1 afin d'accéder à différents types de raisonnements mobilisés dans la résolution de ces types de tâches après un apprentissage des compositions et décompositions.

Différentes interprétations de l'écriture chiffrée chez les élèves

Des difficultés courantes ainsi que certaines interprétations de l'écriture en chiffres ont été pointées dans différents travaux de recherche pour les nombres à deux chiffres (Ross 1989, Fuson 1997) et à trois chiffres (Bednarz et Janvier 1984, DeBlois 1996, Brissiaud 2005, Thanheiser 2009). Nous considérons les interprétations suivantes de l'écriture en chiffres :

a) *Juxtaposition d'unités simples.* Les chiffres sont interprétés en termes d'unités simples (Thanheiser 2009) : « 548 serait 5 unités simples, 4 unités simples et 8 unités simples ». Une variante peut apparaître dans certaines tâches : un des chiffres peut être vu comme un groupement d'unités simples ; par exemple 548 interprété comme 500 unités 4 unités et 8 unités.

b) *Juxtaposition positionnelle.* Les chiffres sont associés aux mots unités, dizaines et centaines et éventuellement à certains objets matériels (par exemple barre pour la dizaine, plaque pour la centaine …). Brissiaud (2005) parle alors de « verbalisme des écritures chiffrées » qui résulte d'une « conception statique » de l'écriture chiffrée où l'élève peut « fournir des réponses apparemment correctes », mais sans réelle compréhension des mots dizaines et centaines comme unités. Le nombre représenté par le chiffre des dizaines n'est pas reconnu comme un multiple de dix (Ross 1989).

c) *Unités simples.* Chaque chiffre est interprété « en termes de groupements d'unités simples » (Thanheiser 2009) : 389 est interprété comme 300 unités simples, 80 unités simples et 9 unités simples. Les différents chiffres ne font pas référence à un système d'unités en relation entre elles.

d) *Système d'unités.* Chaque chiffre est interprété comme un nombre d'unités et ces unités sont en relation entre elles (Thanheiser 2009) : « dans 389 le 3 peut être vu comme 3 centaines ou 30 dizaines ou 300 unités simples, et le 8 peut être vu comme 8 dizaines ou 80 unités simples »[7].

Alors que pour les nombres jusqu'à 99, une difficulté importante dans l'apprentissage de la numération est celle de l'*unitisation*, c'est-à-dire de considérer que dix forment une nouvelle unité la dizaine (Fosnot & Dolk 2001, Houdement & Chambris 2013), l'introduction de la centaine complexifie cette relation en introduisant les relations avec deux unités d'ordres inférieures. Cela amène alors à considérer la centaine comme cent unités simples, dix dizaines et une centaine simultanément (Thanheiser 2009) :

[7] Thanheiser (2009) nomme cette interprétation « *reference units* » dans le texte original, ce que l'on pourrait aussi traduire par *unités de référence*.

Une centaine	Dix dizaines	Cent unités	Et tout cela à la fois

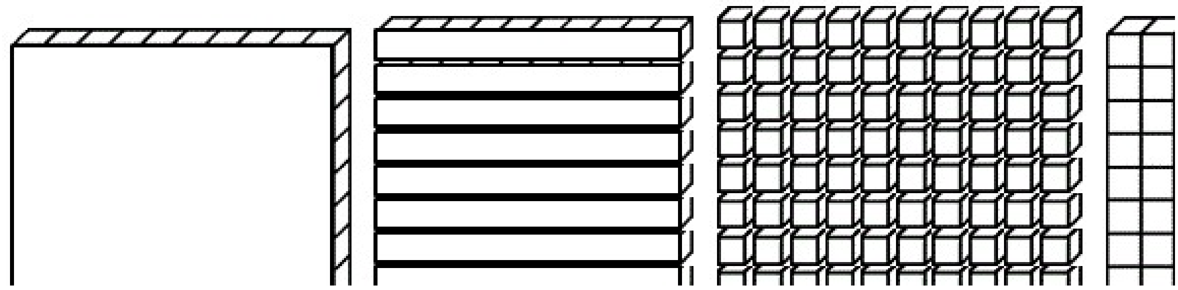

Figure 2 : Différentes interprétations de la centaine (d'après Thanheiser 2009).

C'est cette flexibilité dans l'interprétation possible de la centaine en lien avec l'écriture chiffrée qui permet une compréhension profonde de la numération (interprétation *système d'unités*).

Ce détour par différentes interprétations possibles des élèves montre les potentialités des tâches de compositions et décompositions pour développer ou pour évaluer leur compréhension de la numération. Il permet aussi de confirmer le fait que les compositions et décompositions **canoniques** ne peuvent suffire à installer chez les élèves une compréhension profonde de la numération puisqu'elles n'amènent pas à travailler les relations entre unités.

Exemples de techniques erronées utilisées par les élèves pour composer et décomposer

En nous appuyant sur l'évaluation proposée aux élèves de CE2 (cf. deuxième partie) et l'analyse des réponses des élèves, nous avons analysé les résultats trouvés afin de faire des hypothèses sur les techniques utilisées par les élèves.

Pour les compositions

Nous nous appuyons ici sur les résultats du premier exercice de l'évaluation (cf. tableau 3). La plupart des erreurs de composition dans cet exercice sont liées à l'utilisation de techniques de juxtaposition de nombres construites par les élèves, techniques ayant une portée limitée. Elles relèvent donc de *connaissances locales* (Maurel et al. 2010) :

> « Une connaissance locale est une connaissance mathématique juste du point de vue mathématique, dans un certain domaine dont les élèves ignorent les limites. Ils peuvent alors utiliser cette connaissance en dehors de ses limites de validité ce qui produit des erreurs » (p.43-44).

Les variations sur les valeurs des variables effectuées dans ces deux exercices a permis de mettre en évidence ces connaissances locales. Les juxtapositions de nombres utilisées par les élèves peuvent fonctionner dans certains cas particuliers, mais nous faisons l'hypothèse qu'ils cherchent à les étendre hors de leur domaine de validité. Rappelons que pour composer un nombre par juxtaposition il faut prendre en compte les conditions suivantes (déjà illustrées dans le tableau 2) :

- respect du rang de chaque unité dans l'écriture en chiffres (les unités simples s'écrivent au premier rang à partir de la droite, les dizaines au deuxième, etc.), ce qui peut nécessiter de modifier l'ordre dans lequel les unités sont données avant de faire la juxtaposition des chiffes dans l'écriture chiffrée ;
- présence de chaque unité (jusqu'à l'unité de plus grand ordre) dans l'écriture en chiffres, ce qui peut nécessiter d'utiliser le chiffre 0 pour marquer l'absence d'unités isolées ;
- présence de nombres à un seul chiffre à chaque rang de l'écriture en chiffres, ce qui peut nécessiter de faire des conversions entre unités.

Pour montrer le domaine de validité des techniques construites par les élèves quatre exemples d'écritures à composer sont indiqués : 3c 1d 4u, 4u 3c 1d, 3c 4u et 1c 12d 4u (variations sur l'ordre de présentation des unités et le nombre d'unités de chaque ordre). Voici un tableau récapitulatif des techniques construites par les élèves et des réponses associées.

	3c 1d 4u	*4u 3c 1d*	*3c 4u*	*1c 12d 4u*
Juxtaposition d'unités simples	8	8	7	17
Juxtaposition des nombres d'unités	**314**	431	34	1124
Juxtaposition avec respect de l'ordre des unités dans l'écriture en chiffres	**314**	**314**	34	1124
Juxtaposition avec respect de la position des unités dans l'écriture en chiffres	**314**	**314**	**304**	1124

Tableau 8 : réponses prévisibles par différentes juxtapositions des nombres d'unités

On trouvera en annexe 2 une description plus détaillée des trois dernières techniques.

Pour les décompositions

Nous utilisons ici les résultats du deuxième exercice (cf. tableau 4). Une technique efficace permettant de traiter les différents cas proposés ici est la « troncature » de l'écriture chiffrée. Par exemple décomposer 267 en dizaines et unités peut s'effectuer en « coupant » l'écriture chiffrée après le premier rang en partant de la droite : ce qui est à gauche indique le nombre de dizaines, ce qui est à droite le nombre d'unités. Dans cet exercice des adaptations sont toutefois nécessaires pour tenir compte des variations pour les unités demandées dans les décompositions : en dizaines et unités, puis en centaines et unités.

Les erreurs des élèves sont majoritairement faites pour les deuxième et troisième cas (320 et 641 en centaines et unités) et consistent à utiliser le même type de découpage de l'écriture chiffrée que pour les deux premiers cas (en dizaines et unités) pour lesquels ils n'ont pas fait d'erreurs. Les élèves écrivent 320 = 32c 0u et 641 = 64c 1u. Ces erreurs pourraient donc être plus liées au choix d'enchainement des différents cas dans l'exercice proposé qu'aux connaissances des élèves. Elles montrent toutefois la difficulté d'adaptation à des cas variés de décomposition.

Nous observons deux autres types d'erreurs, moins nombreuses. Le premier type consiste à écrire le « chiffre des », comme par exemple 267 = 6d 7u, 105 = 0d 5u, etc. Le deuxième type d'erreurs est lié à une interprétation de l'écriture chiffrée relevant de la juxtaposition d'unités simples qui amène les élèves à écrire par exemple 641 = 600c + 41u, voire 641 = 640c + 1u ou 641 = 641c +0u.

Une étude de cas de cinq élèves va maintenant nous permettre de mieux comprendre certains raisonnements utilisés par les élèves dans les compositions et décompositions.

Une étude de cas : exemples de techniques et de justifications mobilisées par cinq élèves en fin de CM1

Afin de mieux comprendre comment des élèves traitent ces tâches après un enseignement conséquent des compositions et décompositions, nous avons choisi de nous intéresser à des élèves de CM1 de niveaux hétérogènes. Six élèves ont été choisis par l'enseignante à notre demande, de façon à avoir deux élèves « faibles » en numération, deux élèves « moyens » et deux élèves « forts ». Nous avons retenu les entretiens de cinq de ces élèves qui permettent d'illustrer des profils différents dans l'interprétation de l'écriture chiffrée, les erreurs effectuées et les techniques utilisées.

Nous proposons une série d'exercices (annexe 3) que l'élève réalise individuellement et quand il a terminé, nous menons un entretien individuel à visée d'explicitation : l'objectif est de faire formuler par l'élève ce qu'il a effectivement fait au moment où il réalisé les exercices et non d'en faire une reconstruction a posteriori. Ceci nous amène à poser des questions assez fermées visant à laisser les élèves dans l'explicitation de l'action, comme par exemple : par quoi tu commences ? Comment tu fais … ? Etc. D'autre part, comme nous souhaitons accéder aussi aux explications et justifications (éléments technologiques) des élèves, nous complétons les premières questions par des questions du type « comment tu sais que … ? ». La fiche d'exercices est donnée en annexe 3 et un tableau récapitulatif des erreurs des élèves en annexe 4.

Chloé

Composer. Chloé ajoute des nombres d'unités différentes comme s'il s'agissait d'unités de même ordre, comme dans l'interprétation *juxtaposition d'unités simples* de l'écriture chiffrée. Et pourtant elle utilise une interprétation en *groupements d'unités simples* des milliers. Ceci l'amène à composer 6m 2u en 8000 car

> « six plus deux ça fait huit, donc ça fait huit-mille vu que c'est des milliers ».

On retrouve le même type de raisonnement dans ses compositions avec plus de dix unités à certains ordres, comme pour 2m 15c 3d 7u :

> « le deux milliers je l'ai laissé tout seul et ces trois là je les ai ajoutés ensemble, ça fait vingt-cinq, […] j'ai ajouté un zéro et ça fait deux-mille-deux-cent-cinquante ».

Décomposer. Chloé décompose 2675 en 267c + 5u en s'appuyant sur la règle suivante :

> « il y a toujours un nombre tout seul dans les unités ».

Ceci l'amène à faire une troncature après le chiffre des unités (elle montre avec son stylo qu'elle a séparé les chiffres de 2675) :

> « j'ai laissé le cinq tout seul pour les unités et j'ai deux-cent-soixante-sept ».

Elle fait de la même manière pour le nombre suivant, ce qui lui permet de réussir (5137 = 513d 7u) pour de mauvaises raisons.

Convertir. Chloé s’appuie sur certains indices de surface qui l’amène à chercher quand il faut ajouter ou enlever un zéro, ce qui lui permet parfois de réussir. Pour convertir 5 milliers en unités elle commence par écrire 5 puis se ravise :

> « j’me suis dit si on met cinq unités tout seul […] ça va faire le même nombre donc j’ai rajouté un zéro ».

Pour convertir 60c en milliers, elle s’appuie sur le format d’écriture des milliers dans un exercice précédent :

> « soixante centaines pour que ça donne des milliers j’ai vu que ici c’était trois milliers c’était toujours un nombre tout seul, donc je me suis dit si c’est soixante centaines pour les milliers j’ai mis six ».

Inès

Composer. Inès juxtapose les nombres correspondant aux différentes unités avec respect de l’ordre des unités dans l’écriture en chiffres. Elle compose par exemple 2u 7d 4m en 472 puis se ravise au cours de l’entretien en écrivant 427 :

> « j’ai écrit les milliers ensuite les dizaines et ensuite les unités »

Elle utilise la même technique pour 12c 3m (312) relevant d’une interprétation par *juxtaposition positionnelle*. Et pourtant pour 6m 2u elle marque l’absence de dizaine par un 0 :

> « j’ai vu qu’il n’y avait pas de dizaine donc ça faisait zéro ».

Elle s’appuie sur l’ordre relatif des différentes unités dans l’écriture chiffrée mais pas sur la position du millier ($4^{\text{ème}}$ rang). Pour 2m 15c 3d 7u, elle réduit 15 en 6 afin d’avoir trois chiffres jusqu’aux centaines :

> « J’ai mis mes deux milliers, au lieu d’écrire quinze j’ai fait cinq plus un, six […] parce qu’après ça aurait fait trop grand [...] jusqu’aux centaines il en aurait fallu trois [chiffres] ».

Décomposer. Inès utilise une troncature qui lui permet de réussir les deux décompositions proposées, comme par exemple pour décomposer 5137 en dizaines et unités :

> « Je trouve les dizaines » (*elle montre le rang des dizaines avec son doigt*), « ce qui est après c’est aussi des dizaines ».

Pourtant elle doute de son résultat pendant l’entretien :

> « Les dizaines ça fait trop grand […] il faut deux chiffres ».

Il semble que la technique de troncature vienne ici en conflit avec une règle qu’elle s’est créée du type : *il faut au plus deux chiffres pour le nombre de dizaines*, (vraie pour les nombres à trois chiffres).

Convertir. Pour la conversion, Inès s’appuie sur le nom des unités pour déterminer le nombre de zéros à écrire. Pour 5m = 5000u :

> « J’en ai ajouté trois des zéros car c’est mille et après il y a trois zéros ».

Ceci l’amène à des résultats erronés pour les trois conversions suivantes car elle écrit deux 0 pour 1m = 100c, pour 60c = 600m et pour 8m = 800c (elle associe le mot « centaines » au fait d’ajouter deux zéros). Cette règle pourrait être issue d’une confusion avec les conversions en unités simples.

Lucas

Composer. Lucas semble à la fois utiliser une juxtaposition des nombres avec respect de l'ordre des unités, avec parfois respect du rang des unités, comme pour le premier cas 6m 2u = 6002. Il semble donc s'appuyer sur une interprétation en *unités simples* et s'appuyer sur un passage par le nom des nombres avant de l'écrire en chiffres mais il rencontre des difficultés dans ce passage ce qui ne lui permet pas d'avoir un contrôle de ses résultats.

> « Je sais que six milliers ça fait six-mille et plus deux ça fait six-mille-deux, mais je ne suis pas sûr de ce que j'ai écrit. Je crois que j'ai écrit six-cent-deux ».

De même il recompose 7u 2d 4m en « quatre-mille-vingt-sept » qu'il écrit 427. Pour les compositions avec plus de 10 unités il utilise aussi une juxtaposition des nombres avec respect de l'ordre des unités (2m 15c 3d 7u = 21537 et 12c 3m = 3120) tout en indiquant un passage les unités simples :

> « Deux milliers ça fait deux-mille, quinze centaines ça fait mille-cinq-cent, trois dizaines et sept unités ça fait trente-sept ».

Il ne calcule pas 2000 + 1500 mais juxtapose les chiffres.

Décomposer. Il ne fait pas d'erreur pour la première décomposition (2675 = 26c 75u). Il utilise la technique de troncature mais nos questions pour savoir comment il a fait l'amène à douter de sa réponse et à proposer plutôt 267c 5u :

> « Le cinq il aurait du être tout seul et ça aurait du faire deux-cent-soixante-sept [...] J'avais pas mis le sept avec le six, j'avais mis le sept avec le cinq. Je croyais que c'était une unité au lieu d'être une dizaine. [...] Le sept c'est une dizaine [...] il faut le mettre avec les centaines ».

Par contre il ne remet pas en cause le résultat de 5137 = 51d 37u. Même s'il montre certaines connaissances liées à la position des unités dans l'écriture en chiffres, il utilise les noms des unités uniquement comme nom de rang. Cela ne lui permet pas d'avoir un contrôle sur les regroupements des chiffres à effectuer : les dizaines vont-elles avec les centaines ou avec les unités ?

Convertir. Pour la conversion de 1 millier en centaines Lucas indique en fait le nombre d'unités dans une centaine, qui pourrait être lié à une difficulté à considérer la centaine comme une unité :

> « Dans un millier on a dix trucs comme ça (montre une plaque de cent cubes posée à côté) mais à l'intérieur il y en a cent ».

Il semble vouloir repasser par les unités simples pour faire les conversions. Même s'il réussit les deux dernières conversions, les explications qu'il en donne sont erronées, comme par exemple :

> « Avec des centaines si on fait soixante en centaines ça fait six-cent, mais comme c'est des milliers c'est un six ».

Mathis

Composer. Mathis ne fait aucune erreur. Il s'appuie systématiquement sur un retour aux *unités simples* puis écrit le nombre obtenu en chiffres. Par exemple, pour 6m 2u :

« Six milliers ça fait six-mille et plus deux ça fait six-mille-deux. […] Le deux on le met en dernier car c'est des unités et six-mille ça s'écrit avec trois zéros mais vu qu'il y a le deux, donc six, deux zéros et on met un deux ».

Il fait de même pour les cas avec plus de dix unités à certains rangs en convertissant systématiquement en unités simples, comme par exemple pour 2m 15c 3d 7u :

> Quinze centaines je savais que ça fait mille-cinq-cent donc y'a un autre millier, donc trois-mille-cinq-cent. Après […] c'est les dizaines, trois-mille-cinq-cent-trente, et il reste les sept unités donc trois-mille-cinq-cent-trente-sept.

Décomposer. Mathis ne fait pas d'erreur ici non plus. Il utilise la technique de troncature. Par exemple pour 2675 en centaines et unités :

> « Soixante-quinze c'est pas des centaines donc je le cache et du coup il reste vingt-six ».

Convertir. Dans l'entretien Mathis se rend compte immédiatement de son erreur pour 1m = 100c et se corrige tout seul, en utilisant ici encore un retour aux unités simples.

> « Dix centaines ça fait mille […] je l'ai appris en classe ».

Mais pour les deux dernières conversions (60c en milliers et 8m en centaines) il semble davantage s'appuyer sur la position des unités, sans revenir aux unités simples :

> « Je sais qu'il faut rajouter un zéro parce que c'est quelque chose de plus bas, c'est les milliers après c'est les centaines […] c'est l'unité juste derrière ».

Ethan

Composer. Ethan semble écrire les unités comme elles sont données en respectant le rang de chacune et en écrivant des 0 pour marquer l'absence d'unités. Pour 6m 2u par exemple, il y a deux zéros car

> « Y'a pas de centaine et de dizaines »

Pour les cas avec plus de dix unités à certains ordres il commence par faire une conversion de centaines en milliers, qui semble traduire une interprétation en *système d'unités*. Par exemple pour 2m 15c 3d 7u :

> « Ça fait trois milliers parce que y'a quinze centaines. […] Vu que le un s'est transformé en milliers il ne reste plus que cinq centaines et trois dizaines plus sept unités j'ai fait après »

Décomposer. Ethan utilise une troncature qu'il justifie en s'appuyant sur l'ordre des unités. Par exemple pour la décomposition en centaines et unités :

> « Je regarde le chiffre des centaines et ce qu'il y a au-dessus des centaines […]. On peut pas mettre les dizaines dans les centaines […] parce que les dizaines c'est plus petit que les centaines ».

Convertir. Pour les conversions Ethan semble passer par les unités simples, comme par exemple pour convertir 8 milliers en centaines :

> « Huit milliers c'est comme huit-mille et […] quatre-vingt centaines c'est huit-mille ».

Toutefois, la demande de précision du chercheur dans l'entretien l'amène à donner une deuxième manière de faire

« Huit milliers tu multiplies par dix ».

Même si nous ne savons pas exactement laquelle de ces deux méthodes il a utilisée, nous pouvons voir qu'il est capable d'avoir différents points de vue pour convertir : passer par les unités simples ou utiliser la relation *fois dix* entre centaines et milliers (système d'unités).

Synthèse des entretiens

Le type de tâche de composition permet d'identifier des interprétations des écritures chiffrées mobilisées par les élèves. Il n'est cependant pas possible de classer ces élèves selon les différentes interprétations car elles ne sont pas figées comme nous l'avons vu à travers les raisonnements utilisés en fonction des tâches. Par exemple Chloé mobilise une juxtaposition d'unités simples (ajoute par exemple 6m et 2u) tout en s'appuyant sur l'écriture de 0 pour écrire les milliers. Inès mobilise une juxtaposition positionnelle mais utilise un 0 pour marquer l'absence de dizaine (et pas pour les centaines). Mathis mobilise principalement une interprétation en unités simples pour les compositions mais pour certaines conversions il s'appuie sur la position des unités.

Pour les décompositions, tous les élèves utilisent une technique de troncature, même si certains font des erreurs dans le positionnement de la « coupe » effectuée dans l'écriture chiffrée. Ils utilisent des justifications différentes et les élèves en difficulté sont peu assurés de leur réponse même lorsqu'elle est juste. Aucun élève ne justifie sa troncature en référence aux relations entre unités, même lorsque ces relations sont connues. Les élèves les plus en réussite en numération sont plus sûrs de leur réponse et savent mieux adapter leur technique à différents cas.

Pour les compositions comme pour les décompositions, nous avons aussi pu confirmer que les élèves qui font des erreurs utilisent des règles qui ont une portée limitée (connaissances locales), comme par exemple le fait d'avoir un nombre à deux chiffres quand on cherche le nombre de dizaines, ce qui n'est vrai que pour les nombres à 3 chiffres. Mais les réponses qu'ils donnent ne sont pas dues au hasard et il y a très peu d'erreurs d'inattention.

Pour les conversions d'unités de numération, les élèves ne s'appuient pas sur les relations de base (par exemple 1m = 10c donc 8 milliers = 80c) mais sur la position (ou l'ordre) des unités dans l'écriture chiffrée. De manière générale,, les conversions utilisées par les élèves sont donc « encapsulées » dans les transformations de l'écriture en chiffres : transformation du 1 en 3 pour 2m 15c, association du 2 et du 6 pour lire les centaines dans 2675, etc.

Conclusion

Les compositions et décompositions selon différentes unités sont des tâches incontournables dans l'apprentissage de la numération. Elles peuvent être un point d'appui pour justifier certaines techniques comme associer l'écriture en chiffres à l'écriture en lettres ou dénombrer une collection organisée. La variable « nombre d'unités de chaque ordre » permet de mettre en jeu les relations entre unités quand il y a plus de dix unités à certains ordres. Elle est déterminante pour permettre de développer une compréhension de la numération qui ne se limite pas à la connaissance de la valeur des chiffres en fonction de leur position mais qui prend en compte différentes interprétations des unités ; par exemple une centaine comme dix dizaines ou cent unités.

L'analyse des résultats des élèves aux évaluations proposées montre, d'une part, un lien important en début de CE2 entre la valeur « supérieure à dix » de la variable « nombre d'unités » et les difficultés des élèves pour les compositions. Ceci peut être mis en relation avec les difficultés pour les conversions d'unités : la moitié des élèves réussit la conversion « simple » de 1 centaine en 10 dizaines. D'autre part, ces difficultés sont résistantes dans le temps. Même si les résultats sont meilleurs dans les classes supérieures on retrouve des difficultés du CM1 à la 5ème quand les relations entre unités sont en jeu. Une fréquentation exclusive des compositions et décompositions canoniques (au plus 9 unités à chaque ordre) pourrait être à l'origine de difficultés rencontrées par les élèves qui ont des connaissances locales mais font des erreurs quand ils sont confrontés à des cas non canoniques comme « 4 centaines + 10 dizaines = ... ». Ils étendent les règles apprises par confrontation aux cas canoniques en dehors de leur domaine de validité. Les élèves peuvent alors avoir des réussites factices, par exemple avec des techniques de juxtaposition ne prenant pas en compte le rôle du zéro et/ou les relations entre unités pour les compositions. Nous avons montré différents types de juxtapositions utilisées par les élèves ayant une portée limitée. Proposer des cas variés de compositions dans l'enseignement pourrait amener les élèves à adapter leurs connaissances et à construire des techniques de composition tenant compte à la fois du rang de chaque unité, de la présence de chaque unité et de nombres à un seul chiffre à chaque rang pour écrire un nombre en chiffres.

Pour l'enseignant, une bonne connaissance de différentes techniques et des justifications mathématiques associées peut permettre d'en avoir un usage adapté. Lors d'une phase de conclusion, il peut par exemple choisir de mettre une technique en avant ou bien d'en faire comparer plusieurs pour faire émerger les savoirs de numération sur lesquelles elles s'appuient. D'autre part, la prise d'informations sur les techniques effectivement utilisées par les élèves peut servir à l'enseignant de point d'appui pour proposer des aides adaptées ou pour institutionnaliser les savoirs en lien avec les connaissances mobilisées par les élèves.

Une difficulté que l'on peut prévoir pour l'enseignement des compositions et décompositions est celle du manque de connaissances des relations entre unités chez les élèves. Le risque est alors de ramener les élèves vers un apprentissage de techniques permettant une réussite immédiate comme le comptage en unités simples, la multiplication par dix ou l'utilisation d'un tableau de numération sans mise en lien avec les savoirs de la numération sous-jacents. Pour éviter cela **il est nécessaire de faire des relations entre unités** un enjeu fort d'enseignement. Ce qui ne peut se limiter au travail sur les seuls types de tâches composer et décomposer. Il faut considérer cet enjeu dans le cadre d'une organisation mathématique plus large (séquence et programmation annuelle). Dans une séquence il y aurait à aménager des temps de rencontre avec les relations entre unités dans des problèmes nécessitant la mise en œuvre de connaissances de numération, dans des moments visant la formulation de techniques et l'institutionnalisation des relations qui y sont en jeu, dans des exercices d'entraînement visant une automatisation et des problèmes de réinvestissement dans différents contextes. Dans une programmation annuelle (voire pluriannuelle ou de cycle) il faudrait envisager l'apprentissage des relations entre unités dans la progression sur la numération, en lien avec la taille des nombres étudiés et en relation avec les autres notions où elles sont en jeu comme le calcul mental, le calcul posé et les conversions de grandeurs du système métrique.

Références bibliographiques

ARTIGUE M. (2004). L’enseignement du calcul aujourd’hui : problèmes, défis et perspectives. *Repères IREM*, 54, 23-39.

BEDNARZ, N., JANVIER, B. (1984). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage, *Grand N,* 33, IREM de Grenoble, 5-31

BRISSIAUD, R. (2005). Comprendre la numération décimale : les deux formes de verbalisme qui donnent l'illusion de cette compréhension. *Rééducation Orthophonique*, 223, 225-238.

CHAMBRIS C. (2012). Consolider la maîtrise de la numération des entiers et des grandeurs. Le système métrique peut-il être utile ? *Grand N*, 89, IREM de Grenoble, 39-69

CHEVALLARD, Y. (1999). L’analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.

DEBLOIS, L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches En Didactique Des Mathématiques* 16(1), 71-128.

FOSNOT, C-T., DOLK, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction.* Portsmouth, NH: Heineman.

FUSON, K. C., WEARNE, D., HIEBERT, J., HUMAN, P., MURRAY, H., OLIVIER, A., CARPENTER, T. P., FENNEMA, E. (1997). Children's conceptual structures for multidigit numbers and methods of multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 130-162.

HOUDEMENT, C., CHAMBRIS, C. (2013). Why and how to introduce numbers units in 1st and 2nd grades. *Proceedings of the 8th Conference of Europ. Research in Math.Education*. Turkey.

HOUDEMENT, C., TEMPIER, F. (2015). Teaching numeration units: why, how and limits. In Xuhua Sun, Berinderjeet Kaur and Jarmila Novotná. (Eds) Conference Proceedings of ICMI Study 23: Primary Mathematics Study on Whole Numbers. Macau. 99-106

MARGOLINAS C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

MOUNIER, E. (2012). Les signes de la numération écrite chiffrée et parlée en France : une analyse mathématique à usage didactique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 17, 27-58

ROSS, S. H. (1989). Parts, wholes and place value: A developmental view. *Arithmetic Teacher*, 36, 47-5l.

TEMPIER F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2, *Grand N,* 86, 59-90.

TEMPIER F. (2013) *La numération décimale de position à l’école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d’une ressource*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot, Paris 7.

THANHEISER, E. (2009). Preservice Elementary School Teachers' Conceptions of Mutidigt Whole Numbers. *Journal for Research in Mathematics Education,* 40, 251-281.

Annexe 1 : intégralité de la fiche d'évaluation CE2

1. Ecris en chiffres

a. Cinq-cent-trente-quatre : ………

b. Cent-quatre-vingt-douze : ………

c. Deux-cent-cinq : ………

2. Ecris en lettres

a. 257 : ……………………………………………………………………………

b. 170 : ……………………………………………………………………………

c. 509 : ……………………………………………………………………………

3. Complète

a. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = ………….

b. 8 dizaines + 2 centaines + 5 unités = ………….

c. 6 centaines + 9 unités = ………….

d. 3 dizaines + 6 centaines = ………….

e. 7×100 + 4×10 + 5 = ………….

f. 6×10 + 4×100 = ………….

4. Entoure le plus grand des deux nombres.

a. 200 et 199 **b.** 592 et 597 **c.** 789 et 902 **d.** 345 et 309

5. Complète

a. 4 centaines + 10 dizaines = ………….

b. 5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = ………….

c. 21 dizaines + 3 centaines = ………….

d. 6 centaines + 21 dizaines + 14 unités = ………….

e. 2×100 + 15×10 + 7 = ………….

f. 9 + 34×10 + 4×100 = ………….

6. Complète

a. 267 = … dizaines + … unités

b. 105 = … dizaines + … unités

c. 320 = … centaines + … unités

d. 641 = … centaines + … unités

e. 513 = … ×100 + …

f. 762 = … ×10 + …

7. Complète

a. 5 centaines = ……… unités

b. 80 unités = ……… dizaines

c. 1 centaine = ……… dizaines

d. 3 centaines = ……… unités

e. 60 dizaines = ……… centaines

8. Un directeur d'école a récolté 218 pièces de 1 euro lors de la tombola de la fête de fin d'année.

Il va à la banque pour échanger ces pièces contre le plus possible de billets de 10 euros. Combien de billets de 10 euros peut-il obtenir ?

Cadre pour la recherche :

Réponse : ………………………………………………………………………………

9. Un directeur d'école a besoin de 856 timbres pour envoyer du courrier aux parents d'élèves. Les timbres sont vendus par carnets de 10 timbres. Combien de carnets faut-il commander ?

Cadre pour la recherche :

Réponse : ………………………………………………………………………………

Annexe 2 : exemples de techniques de composition ayant une portée limitée

A partir des quatre exemples de composition proposés dans le texte (3c 1d 4u, 4u 3c 1d, 3c 4u et 1c 12d 4u) voici des exemples de techniques utilisées par les élèves.

Juxtaposition des nombres d'unités.

Il s'agit d'une écriture des nombres d'unités « visibles » dans l'ordre où ils sont donnés. Cette technique permet d'obtenir une écriture correcte pour la quantité 1 (314) mais des résultats erronés pour les autres (431, 34 et 1124).

Ecriture en unités	3c 1d 4u	4u 3c 1d	3c 4u	1c 12d 4u
Réponse de l'élève	**314**	431	34	1124

Tableau : réponses prévisibles par juxtaposition des nombres d'unités

Juxtaposition avec respect de l'ordre des unités dans l'écriture en chiffres.

Il s'agit d'une écriture des nombres d'unités visibles avec respect de l'ordre relatif des unités (prise en compte de la première condition) : les unités simples s'écrivent avant les dizaines (en partant de la droite et en allant vers la gauche), les dizaines avant les centaines, etc. Cette technique permet d'obtenir une écriture correcte pour les quantités 1 et 2 (314) mais des résultats erronés pour les autres (34, 1124). Elle prend en compte la condition de respect du rang de chaque unité.

Ecriture en unités	3c 1d 4u	4u 3c 1d	3c 4u	1c 12d 4u
Réponse de l'élève	**314**	**314**	34	1124

Tableau : réponses prévisibles par juxtaposition avec respect de l'ordre

Ces deux premières techniques de juxtapositions peuvent donner un résultat juste pour des quantités comme 2m 12d 4u ou 12c 2d 4u, même s'il y a plus de dix unités à certains ordres.

Juxtaposition avec respect de la position des unités dans l'écriture en chiffres

Il s'agit d'une écriture des nombres d'unités « visibles » en respectant l'ordre relatif des unités et en écrivant des 0 en cas d'absence d'unité isolée. Cette technique permet d'obtenir une écriture correcte pour les quantités 1, 2 et 3 (314 et 304) mais des résultats erronés pour la dernière (1124). Elle prend en compte les conditions de respect du rang de chaque unité et de présence de chaque unité.

Ecriture en unités	3c 1d 4u	4u 3c 1d	3c 4u	1c 12d 4u
Réponse de l'élève	**314**	**314**	**304**	1124

Tableau : réponses prévisibles par juxtaposition avec respect de la position

L'explicitation de ces « techniques-élèves » permet de mieux comprendre l'intérêt des variations sur les valeurs de la variable nombre d'unités de chaque ordre (cf. partie I) pour le type de tâche de compositions de différentes unités.

Annexe 3 : les exercices proposés aux élèves avant l'entretien

Exercice 1. Complète

a. 6 milliers + 2 unités = …………

b. 7 unités + 2 dizaines + 4 milliers = …………

Exercice 2. Complète

a. 2 milliers + 15 centaines + 3 dizaines + 7 unités = …………

b. 12 centaines + 3 milliers = …………

Exercice 3. Complète

a. 2675 = … centaines + … unités

b. 5137 = … dizaines + … unités

Exercice 4. Complète

a. 5 milliers = ……… unités

b. 1 millier = ……… centaines

c. 60 centaines = ……… milliers

d. 8 milliers = ……… centaines

Annexe 4 : réponses erronées des élèves pour la fiche d'exercices de l'annexe 3.

Entre parenthèse : parfois l'élève se corrige de lui-même dans l'entretien et donne une autre réponse)

		Chloé	Inès	Lucas	Mathis	Killian
Composer	6 milliers + 2 unités	8000	602			
	7 unités + 2 dizaines + 4 milliers	4900	472 (427)	427 (4027)		
	2 milliers + 15 centaines + 3 dizaines + 7 unités	2250	2637	21537		
	12 centaines + 3 milliers	3120	312	3120		
Décomposer	2675 en centaines et unités	267c + 5u				
	5137 en dizaines et unités			51d + 37u		
Convertir	5 milliers en unités	50		5		
	1 millier en centaines		100c	100	100c (10c)	
	60 centaines en milliers		600m			
	8 milliers en centaines		800c			