Résolution de problèmes arithmétiques à l'école

Catherine Houdement

Version auteur de
HOUDEMENT, C. (2017) Résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Grand N, 100,* 59-78

RESOLUTION DE PROBLÈMES ARITHMÉTIQUES A L'ÉCOLE

Catherine HOUDEMENT

LDAR (EA 4434), Université de Rouen Normandie, UA UCP UPD UPEC

Résumé Ce texte[1] cherche à faire un point sur l'enseignement de la résolution de problèmes arithmétiques dont l'objectif communément admis est de travailler le sens des opérations. Il croise plusieurs sources de réflexion : expériences de formation, observations de terrains, analyses de ressources pour enseignants, étude d'élèves résolvant des problèmes, travaux de recherche en psychologie des apprentissages et en didactique. L'étude s'intéresse aux problèmes arithmétiques ordinaires de la classe et insiste sur l'importance de la réussite aux « problèmes basiques », vus comme briques élémentaires de raisonnement. Il propose de revisiter les problèmes arithmétiques selon une typologie constituée des « problèmes basiques », des « problèmes complexes » et des « problèmes atypiques », qui seront introduits au fil du texte. Il montre la nécessité de relancer les recherches sur l'enseignement des problèmes basiques en présentant des dispositifs possibles pour ces recherches.

Introduction

Notre intérêt pour la résolution de problèmes n'est pas nouveau : dans les années 2000, en résonance avec d'autres chercheurs également formateurs (Coppé & Houdement, 2000, 2002 ; Houdement, 1999, 2003), nous avions soulevé les questions que posaient, dans les manuels de mathématiques scolaires de l'époque, quelles que soient les collections, les leçons consacrées à la méthodologie de résolution de **problèmes arithmétiques verbaux**. Feyfant (2015) définit ainsi ces problèmes :

> *Les problèmes arithmétiques verbaux ou à énoncés verbaux racontent des histoires. Ils sont donnés avec des mots et font intervenir peu de symbolisme mathématique. En anglais on utilise les expressions « word problems » ou « story problems ».* (Feyfant, 2015, p.9)

Dans ces leçons, des tâches préliminaires à la résolution du problème, comme souligner les informations utiles, barrer les informations inutiles, rechercher la bonne opération, trouver la question…, étaient proposées aux élèves pour les aider à réussir LES problèmes. Nous avions mis en avant plusieurs raisons de contester la finalité affichée de telles tâches. Par exemple prélever les informations utiles (et délaisser les inutiles) se fait au cours du traitement du problème, cela ne peut pas se faire en amont du problème, en particulier si le problème résiste au sujet (ce qui est confirmé par les travaux de psychologie cognitive, voir plus loin). D'autre part les informations utiles à la résolution sont souvent constituées de tout le texte du problème. Par exemple dans le problème *Paul a 25 cartes. Il a 7 cartes*

[1] Une première version de ce texte est parue dans les *Actes du 42ème Colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques, Besançon 2015.*

de plus que Marie. Combien de cartes a Marie ?, ne retenir que les informations *25 cartes*, *7 cartes* ou *7 cartes de plus* ne fait pas avancer vers la réponse.

En multipliant ce type de leçons, on est progressivement passé du *faire résoudre des problèmes sur un thème donné* à des tâches **préliminaires** à la résolution de problèmes qui visent à faire *apprendre aux élèves à résoudre des problèmes***.** Il est fondamental de pointer que ce dernier objectif s'appuie sur une croyance : il existerait une compétence générale de résolution de problème dont la possession rendrait le sujet capable de réussir n'importe quel problème. Cette croyance est bien sûr erronée : résoudre un problème dépend aussi des connaissances qu'a le sujet sur les concepts mathématiques contenus dans le problème. Même si des articles, notamment de la revue *Grand N*, et des recommandations des textes de programmes 2002 ont cherché à limiter cette dérive, même si des manuels scolaires s'appuyant sur des travaux scientifiques affirment le contraire (voir figure 1), cette croyance perdure, notamment dans les ressources proposées sur la Toile[2] (voir figure 2) Elle est aussi présente dans certains livres de collège (voir annexe 1). Elle est aussi présente dans certains livres de collège (voir annexe 1).

> *Cette approche [méthodologie de résolution de problèmes] a suscité de nombreux débats (...). Or des travaux, en particulier ceux de Jean Julo, ont montré que dans l'activité mathématique de résolution d'un problème numérique, il n'est pas possible de séparer le travail de compréhension de l'énoncé et celui de construction d'une stratégie de résolution : ce n'est pas « a priori » mais en faisant effectivement le problème que l'on va pouvoir trouver la ou les opérations pertinentes à utiliser.*
>
> *Cela étant précisé, il va de soi que, pour résoudre des problèmes numériques à énoncé textuel, les élèves doivent mettre en œuvre leurs compétences en lecture. C'est par des allers retours entre l'énoncé et la recherche de stratégies de résolution que ces compétences vont se développer.*

Figure 1 : Extrait du Livre du Professeur Euro Maths CE2 (Éditions Hatier, 2010, p.26)

Trouver les données utiles pour pouvoir répondre à la question	
Élodie et Arnaud ont trouvé, dans leur grenier, des jouets qu'ils n'utilisent plus. Ils se rendent à la brocante du village car ils espèrent que la vente de ces objets leur permettra d'acheter une console de jeux coûtant 150 €. Ils parviennent à vendre pour 64 € un train électrique de 7 wagons et 15 m de rails ; pour 22 € une poupée de 45 centimètres et, pour 14 €, un lot de 3 jeux de société. Peuvent-ils, à présent, acheter leur console ?	☐ 150 € ☐ 64 € ☐ 7 wagons ☐ 15 m de rails ☐ 22 € ☐ 45 cm ☐ 14 € ☐ 3 jeux

Figure 2 : Extrait de http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/probleme/utile1.htm#CM2

2 Exemples (1) http://www.banqoutils.education.gouv.fr/fic/C6MRSST01.pdf
(2) http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/probleme/utile1.htm#CM2
(3) http://matoumatheux.ac-rennes.fr/num/probleme/manquante1.htm#CM2

Nous faisons l'hypothèse suivante, que nous ne développerons pas ici (voir Artigue & Houdement, 2007 ; Coppé & Houdement, 2010) que l'insertion dans les séances de mathématiques de telles leçons autour des problèmes (notamment arithmétiques verbaux) est liée au flou institutionnel autour de ces objets : en effet il est souvent souligné dans les programmes la nécessité de faire faire des problèmes aux élèves, mais sans en dire plus, comme si l'art et la manière de le faire étaient contenus dans l'expression. Il se pourrait qu'aient ainsi été « inventées » ces nouvelles activités, assez faciles à mener, devant le malentendu créé dans les années 1980 par le fait de donner des problèmes aux élèves qu'ils n'ont pas appris à résoudre.

Actuellement il est toujours recommandé que les problèmes soient partout dans les apprentissages (en amont au cours et/ou en aval d'un savoir à enseigner), qu'ils aient plusieurs fonctions (motiver, introduire, entraîner, réinvestir, légitimer, évaluer, chercher) et plusieurs formes (texte minimal ; texte alourdi d'informations ; texte avec ou sans question ; documents authentiques ; situation vécue…). Mais la résolution de problèmes reste difficile pour les élèves et pour les enseignants qui ne réussissent pas à faire progresser leurs élèves autant qu'ils le souhaiteraient, malgré du temps consacré à cette question.

Attention il ne s'agit pas dans cet article de rejeter par principe un enseignement d'ordre métacognitif sur la résolution de problèmes. L'accompagnement des élèves en résolution de problèmes (et des enseignants dans cet enseignement) reste une question vive. Cet article cherche à motiver et à revisiter le travail et l'organisation des problèmes arithmétiques verbaux, en appui sur différentes recherches.

Le développement de l'article se poursuit par trois parties et une conclusion. La première interroge des travaux de psychologie cognitive sur la question *comment réussit-on à résoudre un problème ?*. Dans la deuxième partie, une recherche sur des stratégies d'élèves confrontés à des problèmes arithmétiques verbaux fait avancer dans la proposition d'une nouvelle organisation des problèmes arithmétiques. La dernière partie confronte cette entrée prospective avec des dispositifs pédagogiques éprouvés.

Point de vue de psychologie cognitive

Des exemples pour réfléchir

La résolution des problèmes qui suivent peut aider le lecteur pour la suite. Dans ces quatre énoncés, Il s'agit de chercher le nombre de tulipes dans un massif pour ces quatre énoncés.

a) un massif de fleurs formé de 60 tulipes rouges et de 15 tulipes noires,

b) un massif de 60 rangées, toutes de 15 tulipes,

c) un massif de 60 fleurs, composé de tulipes et de 15 jonquilles,

d) 60 tulipes disposées en 15 massifs tous identiques[3].

---

[3] Ce dernier problème résiste parfois au lecteur : la réponse est 4 tulipes par massif, un tout petit nombre de tulipes pour un massif. Ici, le contrôle pragmatique (voir p. 67) que le lecteur peut exercer sur le résultat calculé peut le faire douter de la réponse à donner.

Nous ne doutons pas que le lecteur réussisse ces quatre problèmes. Il serait intéressant qu'il essaie de se remémorer comment il a procédé : il a sans doute « à peine » réfléchi (surtout pour les trois premiers), il a presque instantanément eu l'idée de l'opération qui lui donne la réponse. La question peut inviter à essayer de reconstituer, après coup, son cheminement : par exemple une évocation mentale imagée de la situation, le repérage de mots inducteurs, comme « et » ou « rangées », etc.

Les énoncés de ces quatre problèmes s'appuient sur le même contexte, présentent la même structure syntaxique (similarité de lecture-compréhension), posent la même question (combien de tulipes dans UN massif ?), mettent en jeu les mêmes nombres (15 et 60) et pourtant ils relèvent d'opérations arithmétiques différentes. Le rapprochement de ces quatre énoncés invalide déjà les aides méthodologiques évoquées précédemment, car peu de choses, à part les connaissances du sujet qui doit le résoudre (notamment sa compréhension des différentes situations), permet de discriminer ces quatre énoncés.

Comment faisons-nous, experts, pour discriminer ces quatre problèmes et leur associer une opération directe adaptée ?

Un autre problème est soumis à la sagacité du lecteur, repris du problème du Rallye Mathématique Transalpin (Grugnetti & Jaquet 1997) appelé *Les châtaignes de Charles* ©ARMT donné aux grades 5, 6 et 7.

> *Charles a récolté 108 kg de châtaignes. Il les met dans trois paniers, un petit, un moyen, un grand. Les châtaignes du panier moyen pèsent le double de celles du petit panier. Les châtaignes du grand panier pèsent le double de celles du panier moyen. Après avoir rempli ces trois paniers, il lui reste quelques kg de châtaignes, exactement la moitié du poids des châtaignes du grand panier. Combien de kg de châtaignes Charles a-t-il mis dans chaque panier ? Combien de kg lui reste-il ?*

La situation est simple, mais la réponse est moins rapidement trouvée que celle des massifs de fleurs. Pourtant le lecteur maitrise tous les raisonnements nécessaires, en particulier le fait de choisir une référence (masse ou mesure de masse) pour comparer les contenus des paniers et de reconstruire la situation à l'aide de cette référence. Plusieurs techniques sont possibles : algébrique, appuyée sur des longueurs, arithmétique avec essais erreurs.

Ces exemples nous amènent déjà à différencier deux types de problèmes. Dans un premier temps nous qualifierons les problèmes de tulipes de « problème basique » et le problème des châtaignes de problème « non basique ».

Ce que nous apprennent des recherches de psychologie cognitive

Jean Julo (1995, 2002), psychologue cognitiviste, s'est intéressé relativement tôt aux aides à la résolution des problèmes scolaires ordinaires. Il a insisté sur l'existence de processus spécifiques de l'activité de résolution de problèmes :

> *« L'accès aux connaissances et leur instanciation dans une situation donnée ne sont pas des phénomènes triviaux, même dans le cas où l'on a une bonne compréhension et une bonne pratique (entendue comme résultat d'un exercice) de ces connaissances. Ce sont des processus cognitifs ad hoc qui vont faire que l'on est capable ou non de mettre cette situation sous une forme telle que nos connaissances deviennent mobilisables pour les traiter. »* (Julo, 2002, p.35).

Ces processus ont un versant représentationnel (développé ci-dessous) et un versant opératoire (évoqué souvent sous le terme de stratégies) en étroite interaction.

Qu'est ce qu'une représentation ? Une représentation est le fruit d'une profonde activité mentale mettant en œuvre tout un ensemble de processus chargés de traiter les informations sur notre environnement fournies par nos organes sensoriels. Dans le modèle actuel des psychologues, les représentations plus ou moins stables en mémoire à long terme sont les connaissances et les croyances qui nous permettent d'appréhender le monde. La nature des liens entre ces deux « niveaux » de représentations restait en 1995 (Julo, 1995) une des grandes questions de la psychologie cognitive.

Les représentations d'un problème, quel qu'il soit, sont des représentations ponctuelles et occasionnelles, Julo parle de *représentations particularisées*. La représentation du problème ne se réduit pas à la compréhension de son énoncé. La nature d'un problème engage un autre type de représentation.

> *Ce sont les relations complexes entre un but donné et les conditions de réalisation de ce but (les contraintes et les aides qu'introduit l'auteur de l'énoncé) qui caractérisent ce qu'est un problème par rapport à d'autres situations de compréhension de texte. (Julo, 1995, p.16).*

L'enjeu de la résolution de problèmes est aussi spécifique :

> *C'est bien le fait de découvrir par soi-même une solution que l'on n'entrevoyait pas dans un premier temps qui est l'enjeu de cette activité particulière. (Julo, 1995, p.25).*

Une autre façon de décrire la représentation d'un problème est celle de Clément (2009, p.63): « *une construction dynamique, transitoire, déterminée à la fois par les propriétés de la situation et les connaissances disponibles en mémoire* »

D'après Julo (1995, p.90), interviennent dans la résolution de problèmes des connaissances *« liées directement aux situations particulières que nous avons rencontrées auparavant et à l'expérience représentationnelle que nous avons acquise à leur propos »,* ce qu'il désigne sous l'expression schémas de problèmes.

> *Ce sont les représentations construites lors de la résolution de différents problèmes qui s'organisent progressivement en schémas[4] de problèmes. » (Julo 2002, p.43).*

On voit le côté récursif du modèle : résoudre un problème passe par la construction d'une représentation de ce problème et la réussite à ce problème enrichit notre mémoire des problèmes… résolus. D'après Julo (1995) la mémoire des problèmes (sous forme de schémas de problèmes) que nous avons rencontrés et résolus joue un rôle décisif dans la façon dont nous nous représentons un nouveau problème à résoudre.

Des recherches plus récentes confirment que la seule prise en compte des raisonnements en jeu (la structure formelle du problème) ne peut pas expliquer les comportements de tous les enfants face un problème. À structure formelle égale, le contexte du problème, aussi appelé habillage (individus *versus* objets, Temps *versus* Masse ou Longueur) peut plus ou moins favoriser la réussite ou influer sur la procédure de résolution (Sanders, 2007, Gamo et al., 2011). Julo (2002, p.41) avait déjà intégré l'influence potentielle du contexte dans son modèle explicatif et dans ses expérimentations autour de la multi-présentation (voir plus loin).

[4] Attention, il ne s'agit pas de schémas graphiques, mais de schémas cognitifs : des structures cognitives qui stockées dans la mémoire à long terme, sélectionnent et traitent l'information de manière inconsciente (au sens d'automatique).

Il se pourrait aussi que pour un sujet, les problèmes soient d'abord représentés en mémoire par un « prototype »[5], une des trois formes supposées par Julo pour les schémas de problèmes (Julo 2002, p.35-36). Cette représentation pourrait s'enrichir au fur et à mesure de la fréquentation des adaptations de ce prototype (au sens de Robert 2008), ce qui permettrait au sujet de reconnaître et réussir une plus grande variété de problèmes de même structure formelle.

Premières conséquences pour l'enseignement

Notre compréhension de la résolution de problèmes est enrichie par la notion de mémoire des problèmes (Julo, 1995, 2002). Pour un élève confronté à un problème, il y aurait deux possibilités extrêmes : soit il active dès la lecture un schéma adéquat qu'il associe, voire adapte au problème à résoudre, soit en l'absence d'instanciation d'un tel schéma, l'élève doit construire « de toutes pièces » une représentation *ad hoc* du problème. Dans notre propos ce schéma peut être lié au contexte du problème.

Ce modèle, relativement stabilisé en psychologie cognitive, change radicalement selon nous le rapport aux problèmes pour l'apprentissage et l'enseignement. **Il devient urgent et crucial d'enrichir la mémoire des problèmes de chaque élève** : l'élève disposerait ainsi de plus de schémas et face à un nouveau problème, serait plus à même de pointer des analogies avec quelque chose de déjà rencontré, au moins en partie. Cet enrichissement passe nécessairement par la rencontre des élèves avec des problèmes qu'ils mènent à terme. Or les pratiques d'enseignement donnent souvent de façon différenciée de telles occasions aux élèves : certes des problèmes leur sont proposés, mais le temps de recherche s'arrête souvent quand les meilleurs ont trouvé, les élèves qui ont des difficultés peuvent rarement mener à terme la résolution du problème. L'enseignant suppose souvent qu'assister à la correction (qu'elle soit magistrale ou proposée par l'entremise de brefs exposés d'élèves sur leurs productions) produira des effets positifs sur la prochaine résolution. Julo suppose que la source des difficultés persistantes des élèves en mathématiques est « *une carence en matière de véritable occasion de résoudre des problèmes* » (Julo, 2001, p.10).

Mais quels types de problèmes est-il urgent de faire rencontrer et mener à terme aux élèves ? Quels problèmes valent la peine d'être mémorisés au sens défini ci-dessus, pour qu'ils soient résolus de façon quasi immédiate comme les massifs de fleurs du début de cet article ?

Notre hypothèse est qu'il s'agit des problèmes qui constituent des éléments « simples » du raisonnement, au sens de la chimie de Mendeleïev. Cette catégorie recouvrirait les problèmes à deux données [resp. ($2n$+1) données pour les problèmes liés à la proportionnalité], où il s'agit de déterminer une troisième valeur [resp. une $(2n+2)^{ème}$], à énoncé court, syntaxe simple, sans information superflue : les *one step problems*, objets d'étude de Vergnaud (1986, 1997) qui a réalisé un apport magistral sur cette question, quand il décrit les structures additives et multiplicatives,. Ce sont les problèmes que nous appelons « basiques ». Le lecteur aura compris que ce qualificatif est en relation avec un niveau scolaire donné.

---

[5] De la même façon qu'en géométrie plane, le carré est d'abord mémorisé en position prototypique, c'est-à-dire avec des cotés horizontaux et verticaux ou parallèles aux bords de la feuille.

Comment appeler les problèmes qui ne seraient pas *basiques* ? Il nous semble judicieux d'en distinguer deux sortes ;

- d'abord les « *problèmes complexes* » qui sont des agrégats de « problèmes basiques ». La complexité des problèmes peut venir en effet de la distance, dans l'énoncé, entre des informations qui devront être connectées pour la construction de la réponse, comme nous le verrons dans le paragraphe éponyme ;
- ensuite des « *problèmes atypiques* »[6] définis justement par leur caractère non routinier, le fait qu'on suppose que les élèves ne disposent pas de stratégies connues pour les résoudre, qu'ils doivent en inventer de toutes pièces, en s'appuyant sur leurs connaissances passées, notamment leur mémoire des problèmes.

La distinction entre ces trois types de problèmes sera précisée dans la suite.

Que nous apprennent des élèves résolveurs ?

La recherche que j'ai menée de 2006 à 2008 sur les problèmes arithmétiques verbaux, va valider cette hypothèse de l'importance des problèmes basiques pour la résolution de problèmes en général.

Contexte de la recherche.

La question de cette recherche (Houdement, 2011) était volontairement très ouverte : quelles « idées », dans le temps court de la résolution d'un problème arithmétique, sont susceptibles de provoquer chez les élèves une avancée vers la réponse ou au contraire un blocage ? Les problèmes à l'étude étaient des problèmes arithmétiques ordinaires de la classe, relevant de notions déjà travaillées, dont le traitement par les élèves déçoit fréquemment les enseignants, notamment parce qu'ils n'utilisent pas à bon escient les opérations arithmétiques.

L'étude s'est centrée sur les stratégies développées par les élèves confrontés à des problèmes arithmétiques pour débusquer des connaissances dont la possession outillerait l'élève, alors que leur absence le bloquerait dans sa résolution. A priori ces connaissances seraient nécessaires pour réussir, mais non repérées par les institutions d'enseignement, voire même ignorées de la didactique.

La méthodologie employée fut celle d'entretiens semi-directifs à visée d'explicitation[7] (Vermersch, 1994) avec des élèves de grades 3 à 5 (8 à 11 ans) après qu'ils ont résolu individuellement des problèmes ordinaires. Nous avons étudié onze protocoles d'élèves de deux classes différentes, A et B (CE2, CM1, CM2) en les mettant en relation avec copie et brouillon. En croisant des pensées de plusieurs élèves, nous avons ainsi dégagé des redondances entre élèves ou des régularités dans la pensée d'un élève particulier.

Nous présentons ci-dessous quelques résultats.

---

[6] Notamment des « problèmes pour chercher » selon l'expression des programmes du primaire 2002.

[7] Selon Faingold, collaboratrice de Vermersch, l'entretien d'explicitation est une technique de questionnement qui permet de mettre à jour des connaissances implicites mobilisées dans l'action, par un guidage très précis des verbalisations (Faingold, N., Accéder aux savoirs implicites de l'acte pédagogique : l'entretien d'explicitation avec les enseignants experts. *Actes du premier congrès AREF*, mars 1993).

Problèmes basiques : des jeux d'inférence et de contrôle

Comme prévu dans le modèle de Julo, certains élèves infèrent l'opération directement du contexte du problème, comme le traduisent leurs verbalisations, montrant ainsi sans doute le rôle de leur mémoire… des problèmes :

> CH[8] : *Comment tu sais pour un problème que c'est moins / plus / fois*
> Victor (CE2, A*) : Bah quand j'ai la question je sais moins / plus / fois*
> Clémence (CE2, B) *Bah quand je lis l'énoncé ça me vient comme ça / quand je le lis.*
> Sébastien (CE2, A) *Parce que là j'ai pas vraiment réfléchi / donc j'ai pris une feuille de brouillon et pis j'ai écrit j'ai écrit, et pis j'ai trouvé.*

Pour d'autres (ou les mêmes en d'autres occasions), la convocation de l'opération semble moins immédiate : ils infèrent « seulement » le champ conceptuel (hésitent entre addition et soustraction, ou entre multiplication et division), puis décident de la « bonne » opération par différents types de contrôle. Parfois ils testent successivement plusieurs opérations : ils évaluent ou calculent le résultat avec l'une, puis l'acceptent ou la rejettent, et alors essaient une autre opération.

Ainsi Deborah (CM2, A), ayant à trouver le poids d'une table connaissant la masse (300 kg) de 25 tables, essaie une division qu'elle infère sans doute du contexte : ce que nous appellerons une *inférence sémantique*.

Premier extrait

> C.H *: Est-ce qu'avec ces deux phrases là : 25 tables et 300 kg on peut trouver le poids d'une table ?*
> Deborah [hésitante] *: Oui / Enfin…*
> C.H *: Si tu as besoin d'un papier…*
> Deborah ***:*** [en regardant CH]**:** *Je vais faire 300 divisé par 25. (*elle pose la division 300 par 25) *on trouve 12*

Mais devant notre question, elle a un moment de doute, elle hésite entre deux opérations (du même champ conceptuel) et met en œuvre deux contrôles pour les départager deux contrôles. Le premier (second extrait) concerne l'ordre de grandeur du résultat calculé relativement au contexte (*c'est beaucoup trop*, sous-entendu pour le poids d'une table), nous le nommerons un *contrôle pragmatique*. Le second (troisième extrait) est un *contrôle sémantique*, qui renforce pour elle l'idée de la division (*partager c'est diviser*). Les deux contrôles lui font rejeter la multiplication.

Second extrait

> CH *: Alors qu'est ce que c'est 12*
> Deborah *: le poids d'une table*
> CH *: Es-tu sure de ça ?*
> Deborah *: Non ça m'étonnerait*
> CH *: Pourquoi ça t'étonnerait*
> Deborah *: Bah c'est beaucoup / c'est pas assez je veux dire*

Troisième extrait

> Deborah ***:*** *Bah je doute un petit peu*

---

[8] Initiales de l'auteure

CH **:** *Tu doutes un peu parce que tu trouves que c'est pas assez 12 pour une table ? Est ce que tu doutes de l'opération que tu as faite ?*
Deborah **:** *Bah no…non*
CH **:** *Tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat*
Deborah **:** *Oui je pense*
CH **:** *Pourquoi tu penses que c'est l'opération qui va te permettre de trouver le résultat ?*
Deborah **:** *Bah, parce qu'on peut faire une multiplication / 300 multiplié par 25, c'est pas possible / C'est beaucoup trop / Ni une soustraction / Donc je pense faire une division / Et aussi parce qu'il faut partager / Il faut / Oui, faut partager.*

Nous avons mis ainsi en évidence des inférences (une connaissance qui est mobilisée) et des contrôles sur le résultat calculé *avant* sa transformation en une réponse. Les inférences et les contrôles sont des constructions mentales personnelles (souvent implicites, voire inconscientes) qui font avancer le sujet. Un contrôle n'assure pas nécessairement une réponse exacte : il s'agit de contrôle-vérification[9] au sens de Coppé :

> *argument avancé ou action mise en œuvre par l'élève pour limiter l'incertitude sur le résultat (….). Une vérification a pour conséquence soit d'accroître la vraisemblance et éventuellement acquérir la certitude du résultat, soit d'engendrer un doute plus grand et éventuellement déboucher sur une phase de rectification.* (Coppé, 1995, p. 30).

Nous avons repéré des inférences et des contrôles de plusieurs natures :

- **Nature sémantique** : c'est l'interprétation de la situation du problème (Vergnaud 1997), interprétation liée à la représentation que l'élève se fait du problème (au sens de Julo, 1995) qui déclenche des associations de type : *partager c'est diviser* ; *fois c'est multiplier*. A priori ce type d'interprétation se place en amont du choix d'une opération, d'un calcul, c'est alors une inférence. Dans la suite nous ne distinguerons plus inférences et contrôles, mais uniquement la nature de ceux-ci, qui est en relation avec les connaissances que les élèves convoquent pour résoudre le problème.
- **Nature pragmatique** : c'est la connaissance de la réalité évoquée par le texte du problème qui permet d'inférer et/ou qui régule le résultat (par exemple l'ordre de grandeur) et éventuellement convainc l'élève de s'engager dans un autre calcul. Notons que la connaissance du réel (conjoncturelle et locale) peut aussi faire obstacle à l'obtention de la réponse, le réel du problème n'étant pas toujours celui que l'élève fréquente dans son environnement.

Voici d'autres exemples d'inférences et contrôles sémantiques et pragmatiques.

Nicolas (CM2, A) utilise un contrôle pragmatique pour tester l'opération.

CH *: D'accord. Et comment tu sais que tu dois choisir plus ou multiplier ?*
Nicolas **:** *J'essaie comme ça.*
CH **:** *T'essaies comme ça ? Et comment tu sais si ça va ou si ça va pas ?*
Nicolas **:** *Bah, quand je vois que le nombre est trop grand ou trop petit ou que ça me paraît un peu trop.*

---

[9] Il existe aussi de tels contrôles en mathématiques : la preuve par neuf est un contrôle mathématique du résultat calculé d'une multiplication. La preuve par neuf ne valide pas la réponse car elle ne détecte pas les réponses fausses dont l'écart au résultat exact est un multiple de 9.

Ludivine (CM2, A) infère la bonne opération et la contrôle sémantiquement (pour elle, la division diminue le nombre de départ, la multiplication l'augmente) et pragmatiquement (il faut plus d'œufs que de brioches).

> CH *: Bon ça va faire combien d'œufs : 3 œufs pour une brioche, combien pour 8 000 ?*
> Ludivine ***:** Je sais pas // C'est une multiplication.*
> CH ***:** C'est un partage* [évoqué par Ludivine plus haut dans l'entretien*] ou une multiplication ?*
> Ludivine [silence, puis lentement*] : Si on fait une division, on va peut-être trouver moins / que si on fait une multiplication on va trouver plus.*
> CH ***:** Alors ?*
> Ludivine *: Bah, une multiplication.*

Nous avons aussi relevé des **inférences et contrôles syntaxiques :** c'est ainsi que nous qualifions, au sens de Duval (2006), les transformations d'écritures et reformulations langagières d'une part, et les conversions entre oral et écrit d'autre part. Par exemple un élève qui modélise le problème cherché par la phrase *« il faut faire 573 plus quelque chose égale 1260 »* pourrait la convertir en l'écriture 573 + ?=1260. Il pourrait résoudre cette équation par approximations ou la transformer en la recherche de la différence 1260-573 qui lui fournit la réponse. Par exemple un élève qui avait traduit le problème *ranger 1860 voitures en cartons de 6* par *« j'ai essayé de faire 6 fois quelque chose .... »* est resté bloqué sur cette expression langagière orale ; il ne l'a pas transformée par l'écrit 6 x ? =1860, écriture qui lui aurait peut-être donné l'idée de chercher le nombre inconnu par approximations.

Cette étude nous a donc permis de mettre au jour des connaissances élèves, inférences et contrôles, qui les aident à réussir. Certaines étaient à notre avis assez ignorées des institutions d'enseignement, voire didactiques. Par exemple certains élèves semblent considérer une opération arithmétique comme un modèle du problème, ils testent la pertinence de ce modèle en contrôlant l'adéquation, sémantique et/ou pragmatique, au contexte évoqué, du résultat calculé avec ce modèle.

Il apparaît aussi que l'utilisation d'écritures pré-algébriques (et la transformation de ces écritures) ne fait pas partie des ressources disponibles chez les élèves étudiés.

Ces constatations, faites sur quelques élèves, révèlent des connaissances utiles, voire nécessaires à la résolution de problèmes arithmétiques. Comment ces connaissances peuvent-elles s'installer chez tous les élèves ? Ces questions demanderaient des investigations plus poussées.

Problèmes complexes : la nécessité de connecter des informations et de qualifier les résultats

Considérons le problème suivant donné par un des enseignants de l'étude :

> *Au cinéma 'Royal Ciné' un adulte paye 6€ par séance et un enfant paye 4€ par séance. A la séance de l'après-midi, il y avait 50 adultes et des enfants. A la séance*

du soir, il y avait 15 adultes et 20 enfants. La recette de la journée est 542€. Combien y avait-il d'enfants à la séance de l'après-midi ?[10]

Ce problème n'est pas un problème basique, mais un agrégat de problèmes basiques cachés. Un premier travail du résolveur est de construire des problèmes basiques sous-jacents (1) calculables (2) qui font avancer vers la réponse.

Les sous-problèmes basiques calculables sont :

- concernant la séance du soir : nombre de personnes, prix que paient les adultes, prix que paient les enfants, PUIS recette du soir ;
- concernant la séance de l'après midi : prix que paient les adultes ;
- le nombre d'adultes PUIS la recette venant des adultes sur les deux séances.

Construire ces problèmes nécessite, au-delà du calcul, de mettre en relation, de **connecter des informations** (souvent éloignées les unes des autres dans le texte). Il s'agit aussi de savoir quels problèmes sont calculables, ce qui nécessite d'avoir mémorisé antérieurement des problèmes basiques résolus.

Mais ce n'est pas tout ; une autre connaissance est nécessaire, que nous avons nommée la **qualification.**

Examinons la réponse de Nicolas (CM1) :

Bah là j'ai essayé de faire / parce que un adulte c'est 6€ et un seul enfant 4€/ un adulte c'est 6€ donc j'ai fait 15 fois 6, ***90*** */ ensuite il y avait 20 enfants à la séance / comme c'était 4€ j'ai fait 20 fois 4,* ***80*** */ euh/ il y avait 50 adultes donc j'ai fait 50 fois 6,* ***300*** */ et là il demandait combien il y a d'enfants à cette séance / donc j'ai additionné ces 3 là et j'ai trouvé 542 / j'ai trouvé la recette de la journée / j'ai trouvé 72 enfants.*

Nicolas a construit des sous-problèmes basiques calculables utiles, mais il ne trouve pas le nombre d'enfants : le 72 calculé ne correspond pas au nombre d'enfants comme il le croit, mais au prix qu'ont payé les enfants lors de la séance de l'après midi ! Nous pointons dans ses propos un défaut de qualification du résultat 72, comme le confirme la suite de l'entretien pour les autres résultats calculés.

CH ***:*** *alors là quand tu / est ce que.. / quand tu calcules cela / qu'est ce que tu calcules ? / ça correspond à quoi le nombre 90 que tu cherches ?*
Nicolas :(silence)
CH ***:*** *le nombre 90 que tu as trouvé là / si tu pouvais me donner une petite phrase qui va avec ce nombre là*
Nicolas ***:*** (silence)
CH ***:*** *tu vois pas / donc quand tu as fait le calcul tu avais envie de faire ce calcul là mais tu vois pas à quoi correspond 90 ?*
Nicolas ***:*** *non*
CH : *Mais par rapport au problème, qu'est ce que tu as calculé par rapport au problème ?*
Nicolas ***:*** *bah 4€ et 20 enfants*
CH ***:*** *et finalement* CH ***:*** *et ce calcul là (*en montrant sur la feuille 20 x 4*) / est ce que tu vois à quoi il correspond ?/*

---

[10] Extrait de ERMEL (1997 ; 2005).Apprentissages numériques et résolution de problèmes CM1. Paris : Hatier

Nicolas **:** *à 4 fois 20*
CH **:** *mais quand tu fais 4€ et 20 enfants qu'est ce que tu obtiens à la fin ?*
Nicolas **:** *80€*

Nicolas parvient à grand peine, avec notre aide, à « qualifier faiblement » sa réponse. Nous distinguons en effet **qualification faible**, le fait de préciser l'unité de mesure (en bref de donner la grandeur réponse, ici 80 €, un prix) et **qualification**, le fait d'expliciter le rôle que joue la grandeur dans le problème (ici le prix qu'ont payé les enfants à la séance du soir).

A contrario Corentin, dans la même classe, sait qualifier. Il a aussi pris conscience de l'importance de la qualification pour la résolution de problèmes complexes. En effet dans l'entretien il cite spontanément la mémoire d'un problème « difficile » qui l'a marqué : « en fait j'avais mélangé le nombre de T-shirts et les euros »

Pour le problème *Le libraire dit : « Avec mes 2255 €, si j'achète 36 livres d'art à 62 €, il me restera 13 €. » A-t-il raison ?*, il a écrit sur son brouillon :

2255 : euros
36 : livre-darts
62 : prix des livre-darts.

Lors de l'entretien, il dit :

En fait dans ma tête quand je lis / là il y a 2255 € / ça c'est clair / y a 36 livres ça coûte 62 €/ après je calcule ces deux là / après ça fait le nombre d'euros que je dois payer / et après je compare les deux que j'ai / le nombre d'euros et ce que j'ai trouvé.

Conclusion sur cette recherche

L'étude des réflexions d'élèves lors de la résolution de problèmes arithmétiques nous a confortée sur la pertinence de l'existence d'une mémoire des problèmes (résolus) qui permet l'inférence de l'opération ou du champ conceptuel dont relève le problème. Ces références mémorielles sont filtrées par des inférences et contrôles sémantiques, pragmatiques et syntaxiques.

Elle a aussi validé le modèle du *problème complexe*. Résoudre un *problème complexe* nécessite de connecter des informations pour construire des sous-problèmes calculables, souvent basiques, et utiles pour avancer vers la réponse. Mais cela exige aussi de qualifier les résultats intermédiaires (pour rester dans le domaine des grandeurs contextualisées et garder le lien avec le contexte de départ) ; et même d'avoir pris conscience de la nécessité de ce travail de pensée (compétence métacognitive), comme le déclare Corentin.

Nous pensons que le rôle que jouent les problèmes basiques dans la résolution des problèmes complexes renforce la nécessité d'un enseignement des *problèmes basiques*.

Quelles pistes pour l'enseignement ?

Problèmes basiques et sens des opérations

Au fil du texte, nous avons donné des caractéristiques des problèmes basiques. Précisons davantage.

Grâce aux travaux de Vergnaud (1986) et notamment de l'équipe autour d'Hervé Péault (Vergnaud dir., 1997), les problèmes basiques arithmétiques sont définis et hiérarchisés selon la complexité des raisonnements en jeu. Ces modèles des structures additives et des structures multiplicatives sont connus en didactique depuis fort longtemps, mais ils restent mal compris et parfois même mal enseignés dans les centres de formation.

Pour nous ces travaux règlent aussi la question du **sens des opérations** grâce aux structures additives et multiplicatives : ainsi le sens de l'addition, indissociable de celui de la soustraction, est composé des différents types de problèmes basiques de structure additive que le sujet doit savoir résoudre : par exemple, en cycle 2, essentiellement des problèmes de composition d'états et des problèmes de transformation d'états (Vergnaud, 1997). Bien sûr, il se complète par des compétences de calcul en ligne et de calcul posé. Ce sens s'enrichirait progressivement lors de la résolution de problèmes relevant de raisonnements plus complexes (au sens de Vergnaud, 1997).

Par exemple, en CP-CE1, à contexte et syntaxe équivalents, un problème additif de transformation d'état avec état final inconnu est moins complexe qu'un problème de transformation d'état avec état initial inconnu. Un problème additif de comparaison avec recherche de la valeur de la comparaison est relativement équivalent à un problème additif de transformation d'état avec recherche de la transformation. Un problème additif de transformation d'état, quelle que soit la place de l'inconnue, est moins complexe qu'un problème additif de composition de transformations de sens opposés.

Il serait sans doute pertinent de proposer dans les programmes des exemples de problèmes basiques par cycle ceux dont on vise la résolution « quasi automatique » (à la façon de Victor, Clémence, Sébastien) en fin de cycle (voir annexe 2).

Il ne s'agit cependant pas d'ignorer l'influence que peuvent avoir les habillages des problèmes sur les réussites des élèves à ces problèmes (déjà rappelé plus haut). Reste à opérationnaliser la prise en compte de cette variable pour l'enseignement ordinaire.

Dans le même ordre d'idées, une meilleure connaissance de l'impact de certaines formulations sur la réussite des élèves (Porcheron, 1998 ; Houdement, 2003) permettrait d'outiller l'enseignant dans ses choix. Nous ne développerons cet impact du texte sur la résolution qu'avec un exemple. Le problème *Pierre et Anne ont ensemble 9 pommes. Pierre a 3 pommes. Combien de pommes a Anne ?* n'est pas un problème basique en début au CP, à cause de sa formulation : la réponse donnée en CP est d'ailleurs souvent 9. Par contre, le problème *Pierre et Anne ont ensemble 9 pommes. 3 des pommes appartiennent à Pierre, les autres appartiennent à Anne. Combien de pommes a Anne ?* est un problème basique au CP, notamment parce que le fait qu'Anne ait une collection de pommes est dit, il ne doit pas être inféré (Porcheron, 1998) par l'élève. Le nombre de réponses correctes augmente de façon significative par rapport au précédent.

Des exemples de dispositifs d'enseignement à enrichir

L'enjeu de cet enseignement est très clair : il s'agit de permettre aux élèves de **réussir seuls** ces problèmes. Il est urgent de consacrer plus de temps à la résolution de problèmes basiques. Quels dispositifs d'enseignement, adaptables aux classes ordinaires, mettre en place avec cette finalité ? Pour nous c'est une question cruciale sur laquelle devraient se concentrer les recherches.

Les situations d'enseignement, transposées de situations didactiques de Brousseau et de ses élèves, qui cherchent à mobiliser les connaissances des élèves en situation (phases d'action), à faire expliciter leurs modèles d'action, à nommer et travailler les savoirs induits par ces actions et formulations, participent à cet enrichissement des problèmes résolus. Par contre ces travaux prennent peu en charge les entraînements systématiques sur les problèmes arithmétiques, autrement dit l'exercice des problèmes arithmétiques.

D'autres travaux visent une catégorisation, implicite ou explicite des problèmes résolus. Il ne s'agit pas de catégorisations naïves (et fausses), pourtant encore partagées par nombre d'enseignants, qui consistent à classer les problèmes par opération[11] ou par *mots inducteurs*[12]. Les recherches de Julo (1995, 2002) sur la « multi-présentation », reprises et étendues par Nguala (2009), visent à faciliter la construction de la représentation du problème en proposant à la résolution, non pas un seul problème à la fois, mais plusieurs problèmes, qui se ressemblent quant aux raisonnements en jeu et aux données numériques, mais qui ont des contextes évoqués différents. Ce dispositif augmente la réussite à chaque problème et a priori (du moins théoriquement) concourt à la mémorisation des problèmes résolus. Cette recherche n'est pas contradictoire avec celles qui pointent des possibles effets du contexte, au contraire : l'appui de l'élève sur un contexte « favorable », en d'autres termes le choix de résoudre d'abord un problème qu'il juge « facile » pour lui pourrait lui permettre de réussir les problèmes ressemblants (en termes de raisonnement en jeu dans le problème).

Les travaux de Priolet (2014) vont dans ce sens (explicite), en apprenant à l'élève à relier entre eux des problèmes résolus et à consigner ces relations dans un cahier. Sa recherche repose sur la scénarisation de quatre principes. Le premier principe, recherche de solutions, consiste à laisser les élèves trouver une réponse au problème sans passer par des questions préalables perturbatrices (informations utiles, inutiles..) et à comparer des procédures. Le second principe, mise en réseau des connaissances, amène l'élève à rapprocher le nouveau problème de problèmes plus anciens de la vie de la classe et déjà résolus. Le troisième principe recommande d'utiliser des représentations graphiques variées pour travailler un problème comme des opérations, des dessins, des schémas, du texte… et de savoir passer de l'une à l'autre. Enfin le dernier principe, catégorisation, demande aux élèves de ranger les problèmes résolus dans des boites-référentes qui regrouperont les problèmes relevant des mêmes raisonnements au sens de Vergnaud.

Les travaux cités aident donc l'élève à construire des ressemblances et des différences de structure formelle, contrôlées par l'enseignant, entre des problèmes variés choisis par l'enseignant. Bien entendu, pour garder la cohérence de nos précédents développements, il serait nécessaire que ce travail se place **après que l'élève a résolu les problèmes** et pris connaissance de diverses procédures de résolution, Ceci suppose aussi que l'enseignant sache établir quels problèmes se ressemblent au sens de Vergnaud.

Dans tous les cas il serait bon de veiller à ne proposer tel problème complexe à la classe qu'après que les élèves ont résolu un certain nombre de problèmes basiques du type de ceux qui constituent le problème complexe.

[11] On sait, en France, depuis les travaux de Vergnaud, que la difficulté des problèmes dépend plus de la complexité de la situation évoquée que de l'opération en jeu.

[12] Par exemple, la présence de « moins » entraînerait la soustraction ; celle de « fois » une multiplication, etc. Les problèmes, *Marie a 18 ans. Elle a sept ans de moins que Pierre. Quel est l'âge de Pierre ?* et *Zoé a additionné beaucoup de fois des 8 et trouvé 136. Combien de 8 a-t-elle additionné ?* sont des contrexemples évidents.

Une pratique d'enseignement à interroger

Plus récemment nous avons été interpellée par les pratiques ordinaires de l'enseignement en Chine et l'importance des « variations », mises notamment en valeur par Bartolini-Bussi (2011). Les variations de problèmes semblent être la méthode standard d'approche des problèmes en Chine. Il s'agit d'apprendre aux élèves à voir dans la même situation (de tous les jours ou interne aux mathématiques) différentes façons de combiner des nombres, de demander aux élèves de résoudre, non pas un, mais une série de problèmes ressemblants (même contexte, mêmes valeurs numériques, mais calculs relationnels différents : combinaison, changement, comparaison) accompagnés de schémas (graphiques) de résolution, puis d'inciter les élèves, après résolution, à formuler des ressemblances et des différences entre ces problèmes. Or il semble que les élèves chinois soient de meilleurs résolveurs de problèmes que dans d'autres pays, dans des classes souvent très chargées. Un exemple de démarrage d'une telle leçon, traduite en anglais par Bartolini-Bussi (2011), figure en annexe 3. Bartolini-Bussi (2011) souligne cette différence fondamentale, portée par la philosophie chinoise : plutôt que d'analyser et de classer des problèmes (l'attitude des pays occidentaux), les problèmes sont considérés dès le commencement comme un **tout** par les enseignants et les enseignants les font travailler comme un **tout**.

On peut noter que cette mise en relation de problèmes « proches » entre en résonance avec les travaux de Vergnaud sur les champs conceptuels additifs et multiplicatifs et les types de raisonnement en jeu, mais aussi avec ceux de Julo sur les aides à la construction de la représentation d'un problème. Il est remarquable de trouver dans des pratiques d'enseignement traditionnelles orientales la scénarisation de principes dégagés par des recherches didactiques occidentales bien postérieures. Ce serait aussi intéressant d'étudier plus précisément ce dispositif et de mener des recherches didactiques pour développer sa potentialité à enrichir la mémoire des problèmes des élèves de culture occidentale.

Conclusion

La résolution réussie des problèmes arithmétiques est un enjeu fort de l'enseignement mathématique de l'école, et ce dans tous les pays du monde.

Dans ce texte, en nous appuyant sur divers travaux, nous avons tiré des fils conducteurs pour essayer d'améliorer cette réussite :

- comprendre ce qui se joue pour le sujet dans la résolution, notamment cette dialectique (mentale) entre inférence automatique d'une stratégie efficace (mémoire des problèmes) et construction d'une nouvelle stratégie si le problème n'évoque rien de connu ;
- considérer comme un objectif premier d'enrichir la mémoire des problèmes résolus de chaque élève, puisque la richesse de cette mémoire conditionne la réussite à de nouveaux problèmes : des recherches sur la construction de dispositifs avec cette finalité sont nécessaires ;
- penser le sens d'une opération (qui s'enrichit progressivement) comme la capacité à résoudre des problèmes (relevant de raisonnements progressivement plus complexes, au sens de Vergnaud) qui relèvent du champ conceptuel associé à cette opération (structures additives *versus* structures multiplicatives);

- envisager les problèmes en trois types[13], notamment pour leur fonction dans les apprentissages : problèmes basiques dont il est attendu une résolution « automatisée » ; problèmes complexes, agrégats de problèmes basiques où la construction et la connexion des informations, nécessaires pour la résolution, est à la charge de l'élève ; problèmes a-typiques (qui ne sont pas des agrégats de problèmes basiques), dont la résolution demande la construction d'une stratégie, à défaut d'une ressemblance que percevrait le sujet avec un problème déjà résolu.

La résolution de problèmes en général semble s'imposer comme exercice très courant (voir les programmes 2016 de cycle 4). Elle est aussi devenue un moyen d'évaluer la pertinence de l'enseignement d'un pays (études PISA).

Mais il ne faut pas oublier que la résolution de tels problèmes nécessite, au minimum, la mémorisation de problèmes basiques (relevant des savoirs en jeu) et la capacité à connecter des informations. L'école doit prendre à sa charge cette construction.

Bibliographie

ARTIGUE, M. & HOUDEMENT, C. (2007). Problem solving in France: didactic and curricular perspectives, *Zentralblatt der Didaktik der Mathematik*, 39**,** 365-382.

BARTOLINI-BUSSI, M.A., CANALINI, R. & FERRI, F. (2011). Towards Cultural Analysis of Content: Problems With Variation In Primary School. *Proceedings SEMT 11*, Prague.

CLEMENT, E. (2009). *La résolution de problème : à la découverte de la flexibilité cognitive,* Paris : Armand Colin.

COPPÉ, S. (1995). Types de connaissances mises en œuvre par les élèves dans la détermination de la composante publique de son travail. In G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Tiberghien (coord.). *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 129-144). Grenoble : La Pensée Sauvage.

COPPÉ, S. & HOUDEMENT, C. (2000). Étude des activités de résolution de problèmes dans les manuels de cycle 3. *Actes du 26ème Colloque sur la formation des maîtres en mathématiques* (pp.209-224). COPIRELEM Limoges 1999. IREM de Limoges

COPPÉ, S. & HOUDEMENT, C. (2002). Réflexions sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire, *Grand N,* 69, 53-63.

COPPÉ, S. & HOUDEMENT, C. (2010). Résolution de problèmes à l'école primaire : perspectives curriculaire et didactique. *Actes du 36ème Colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques* (pp.48-71). COPIRELEM Auch 2009. ARPEME

DUVAL, R. (2006). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. *Actes du 32ème colloque sur la Formation des Maîtres* (pp.67-89). COPIRELEM Strasbourg 2005. IREM de Strasbourg.

---

[13] Trois types entre lesquels les frontières sont mouvantes : un problème de partage, atypique en CE1, devient basique en fin de cycle 2. Pour un élève donné, un problème a priori basique dans le niveau de classe, par exemple *quel nombre de pages complètes si 50 photos sont collées dans un album à raison de 8 photos par page*, peut rester a-typique, par défaut de mémorisation : dans ce cas l'élève ne pourra pas produire l'opération « minimale » attendue (50 divisé par 8)

FEYFANT, A. (2015). La résolution de problèmes de mathématiques au primaire. *Dossier de veille de l'IFÉ*, 105. Lyon : ENS de Lyon.
En ligne http://ife.ens-lyon.fr/vst/DA-Veille/105-novembre-2015.pdf

GAMO, S., TAABANE, L. & SANDER, E. (2011). Rôle de la nature des variables dans la résolution de problèmes additifs complexes. *L'Année psychologique*, 111, 613-640.

GRUGNETTI, L. & JAQUET, F. (1997-98). La résolution de problèmes par classes. *Grand N*, 61**,** 61-69.

HOUDEMENT, C. (1999). Le choix des problèmes pour la résolution de problèmes. *Grand N*, 63**,** 59-76.

HOUDEMENT, C. (2003). La résolution de problèmes en question. *Grand N*, 71**,** 7-23.

HOUDEMENT, C. (2009). Une place pour les problèmes pour chercher, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 14, 31-59.

HOUDEMENT, C. (2011). Connaissances cachées en résolution de problèmes arithmétiques à l'école. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 15**,** 67-96.

HOUDEMENT, C. (2015). Le RMT, médiation entre enseignants et résolution de problèmes. *Gazette de Transalpie*, 5 (pp.7-18). ARMT.

HOUDEMENT, C. (2016). Problèmes arithmétiques de réinvestissement: une synthèse, des pistes. *Actes du 42ème Colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques* (CD-Rom). COPIRELEM Besançon 2015.

JULO, J. (1995). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.* Presses Universitaires de Rennes.

JULO, J. (2001). Aider à résoudre des problèmes. Pourquoi ? Comment ? Quand ? In *Actes du 27ème Colloque des formateurs d'enseignants du premier degré en mathématiques* (pp.9-28). COPIRELEM Chamonix 2000. IREM de Grenoble.

JULO, J. (2002). Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes ? *Grand N*, 69, pp. 31-52.

NGUALA, J.B. (2005). La multi-présentation, Un dispositif d'aide à la résolution de problèmes. *Grand N*, 76, 45- 63.

PORCHERON, J.L. (1998). *Production d'inférences dans la résolution de problèmes additifs*. Thèse de l'Université Paris 8.

PRIOLET, M. (2014). Enseignement-apprentissage de la résolution de problèmes numériques à l'école élémentaire : un cadre didactique basé sur une approche systémique. *Éducation et didactique*, 8-2, 59-86.

ROBERT, A. (2008). Une méthodologie pour analyser les activités (possibles) des élèves en classe. In F. Vandenbrouck (coord.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp.45-57). Paris : Octarès Éditions.

SANDER, E. (2007) Manipuler l'habillage d'un problème pour évaluer *les* apprentissages. *Bulletin* de *Psychologie*, 60, 119-124. ·

VERGNAUD, G. (1986). Psychologie du développement cognitif et didactique des mathématiques. Un exemple : les structures additives. *Grand N*, 38, 21-40.

VERGNAUD, G. (dir. 1997 ; 2001). *Le Moniteur de Mathématiques cycle 3. Résolution de problèmes.* Paris : Nathan

VERMERSCH, P. (1994). *L'entretien d'explicitation en formation continue et initiale.* Paris : ESF.

Annexe 1

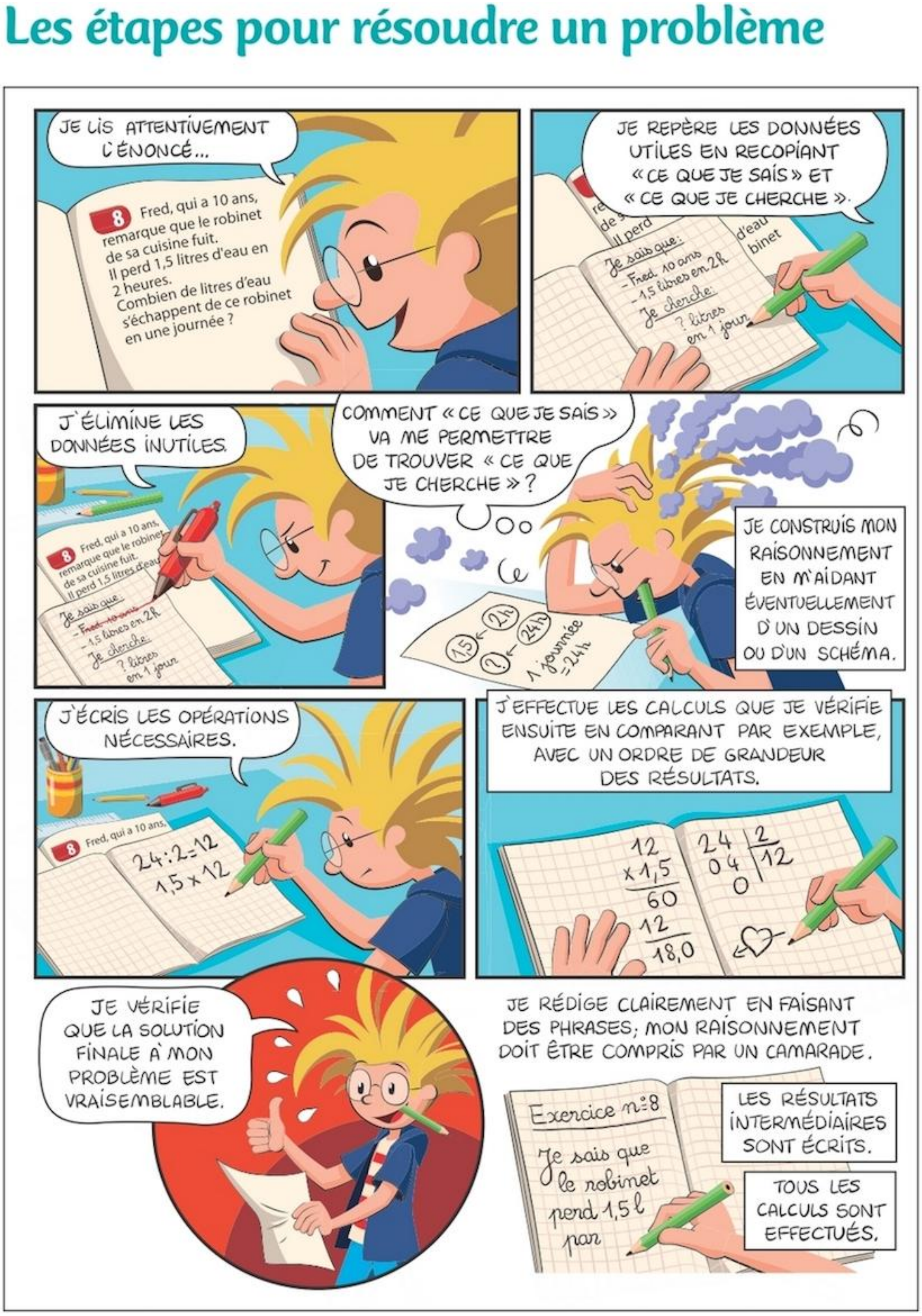


Figure 3 : Extrait de *Myriade 6ème* (Bordas 2009, 2014 ; 2016 p.241)

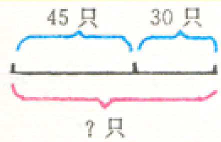
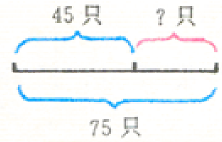
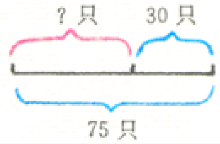
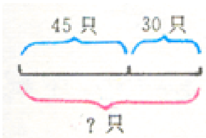
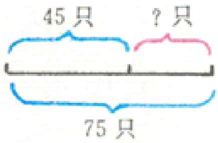
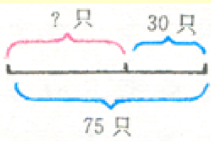
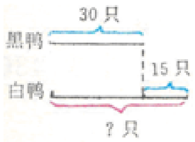
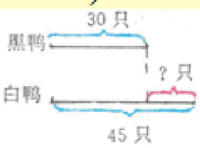
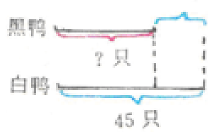
Annexe 2

Voici des exemples de problèmes basiques multiplicatifs. On notera que le caractère basique d'un problème dépend du niveau « théorique » de classe.

- ✓ Une piste d'athlétisme mesure 400 m. Paul fait 5 tours de piste. Quelle distance a-t-il parcourue ? *Problème de proportionnalité simple, multiplicatif,* basique en CE2
- ✓ Dans cette salle il y a 18 rangées de 25 fauteuils. Combien de personnes peuvent s'asseoir sur un fauteuil ? *Problème de proportionnalité simple multiplicatif (ou problème de proportionnalité double),* basique en CE2
- ✓ Pierre met huit min pour aller de chez lui à l'école. Zélie met quatre fois plus de temps. Combien de temps met Zélie ? *Problème de comparaison multiplicative,* basique en CE2
- ✓ Cette salle comporte 400 places disposées en 25 rangées régulières. Combien de places par rangée ? *Problème de proportionnalité simple, division quotition (ou problème de proportionnalité double),* basique en CM
- ✓ Alice met douze min pour aller de chez elle à l'école, trois fois moins de temps que Ryan. Combien de temps met Ryan ? *Problème de comparaison multiplicative,* basique en CM

Annexe 3

Un extrait de manuel chinois de grade 2 (équivalent CE1) :
The nine problems of ducks (Sue Xue 1996)
Les neuf problèmes de canards

<table>
<tr><td colspan="3">First solve the nine problems below. Then explain why they have been arranged in rows and columns in this way, finding relationships</td></tr>
<tr>
<td>(1)In the river there are 45 white ducks and 30 black ducks. All together how many ducks are there?</td>
<td>(2)In the river there are white ducks and black ducks. All together there are 75 ducks. 45 are white ducks. How many black ducks are there?</td>
<td>(3)In the river there are white ducks and black ducks. All together there are 75 ducks. 30 are black ducks. How many white ducks are there?</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>(1) In the river there is a group of ducks. 30 ducks swim away. 45 ducks are still there. How many ducks are in the group (at the beginning)?</td>
<td>(2) In the river there are 75 ducks. Some ducks swim away. There are still 45 ducks. How many ducks have swum away?</td>
<td>(3) In the river there are 75 ducks. 30 ducks swim away. How many ducks are still there?</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>(1) In the river there are 30 black ducks. White ducks are 15 more than black ducks (black ducks are 15 less than white ducks). How many white ducks are there?</td>
<td>(2) In the river there are 30 black ducks and 45 white ducks. How many white ducks more than black ducks (How many black ducks less than white ducks)?</td>
<td>(3) In the river there are 45 white ducks. Black ducks are 15 less than white ducks (white ducks are 15 more than black ducks). How many black ducks are there?</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>