Construire des connaissances numériques aux cycles 2 et 3

Denis Butlen, professeur des universités,
Pascale Masselot, maître de conférences,
ESPE de Versailles, Université de Cergy-Pontoise, LDAR

Plan

- I. Les systèmes de numération : principes et situations de référence
- II. Ruptures et continuités : des nombres entiers aux nombres décimaux
- III. Du côté des pratiques des enseignants :gérer la tension entre dévolution et institutionnalisation

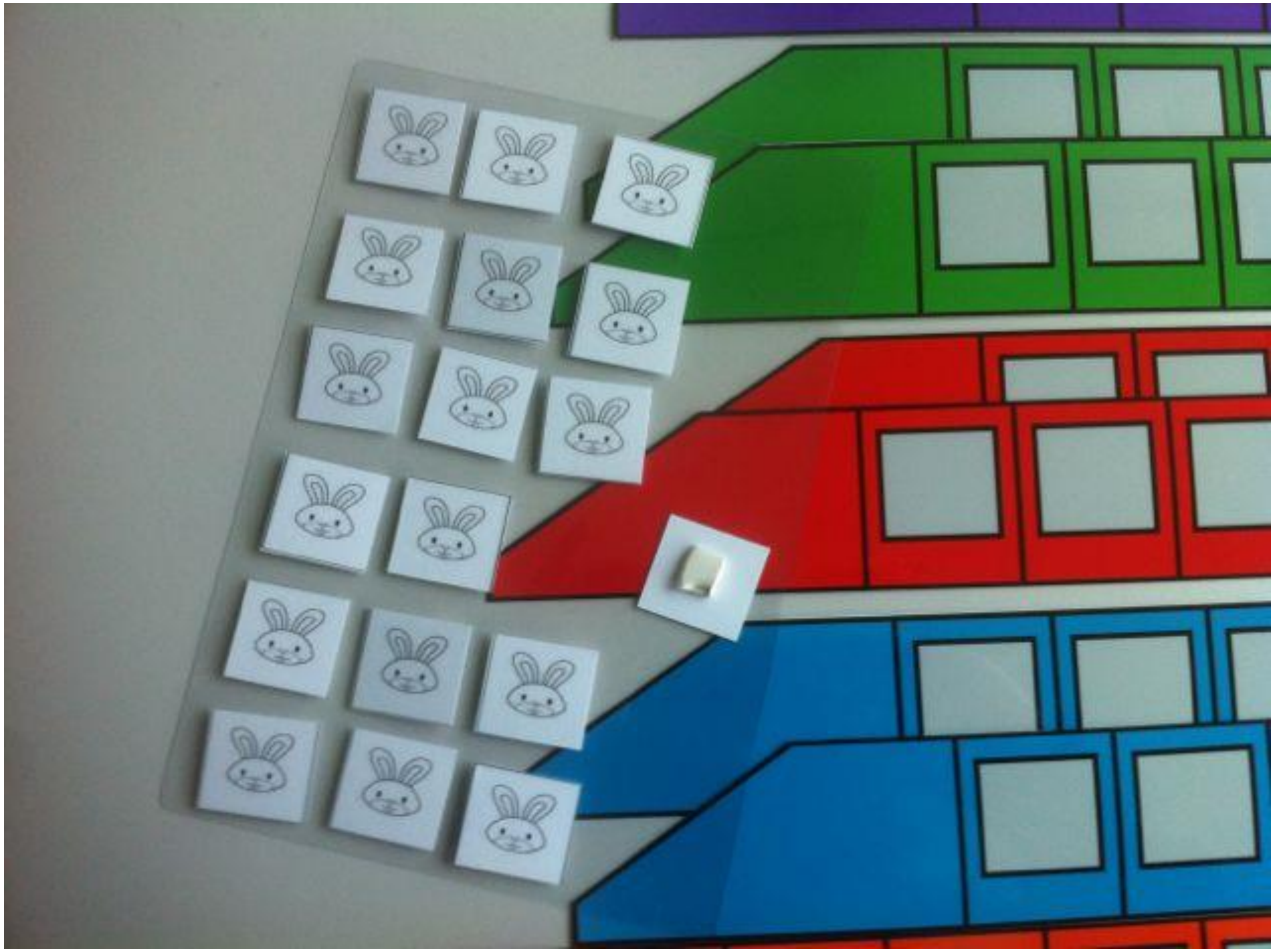
Construction du nombre au cycle 1 : quels enjeux ?

Activités de dénombrement

Construire une collection équipotente à une collection donnée

Le nombre mémoire de la quantité

Le nombre mémoire du rang



Ce qui différencie cycle 1 et cycle 2

- Passer des mots nombres à l'exploration des systèmes de numération
- Passer de procédures de dénombrement relevant du comptage ou surcomptage à des procédures de calculs
- Traduire progressivement par des écritures mathématiques des relations et des faits exprimés oralement auparavant
- Continuer et approfondir le travail sur compositions et décompositions de nombres

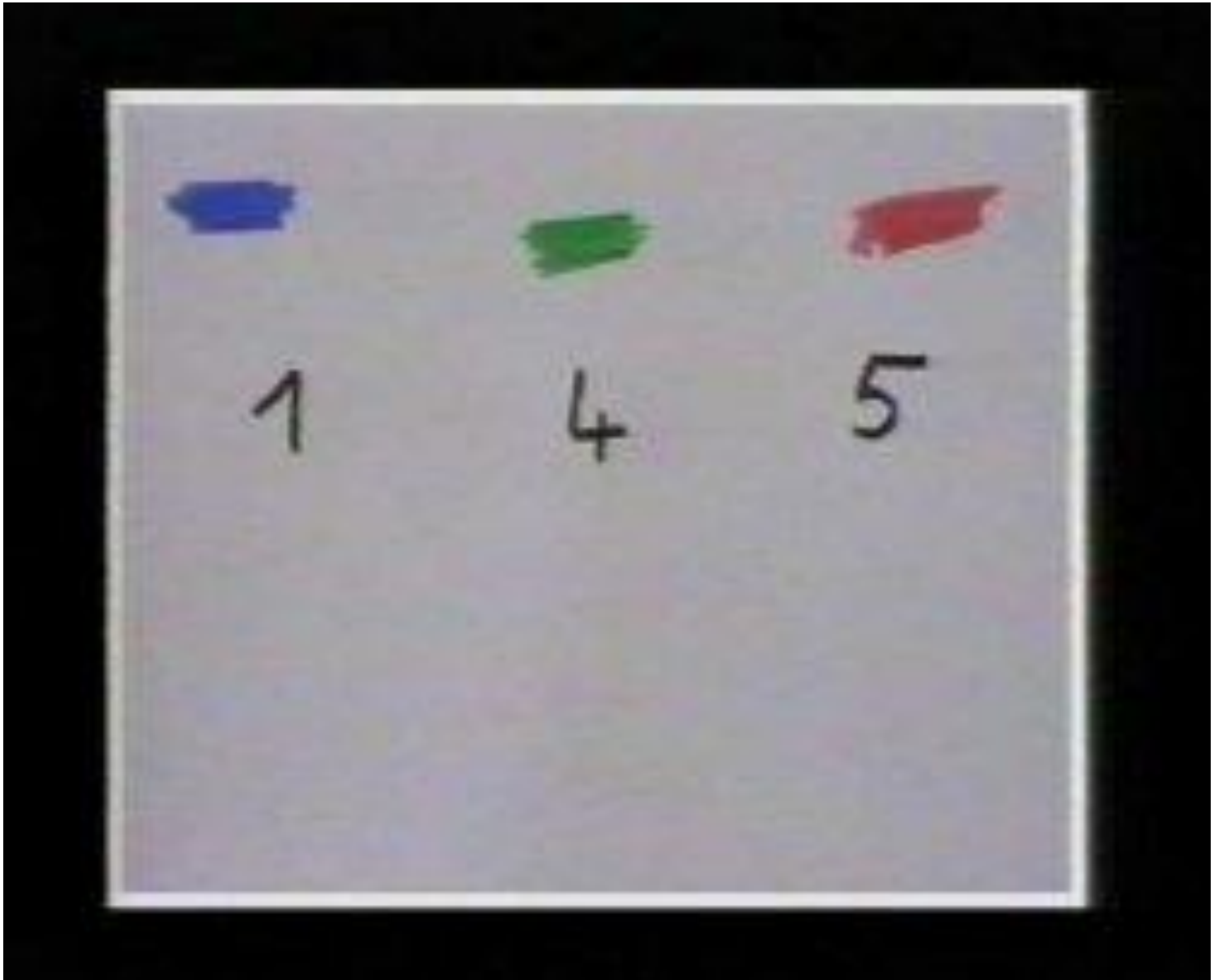
Des situations additives

Le bon panier

Enveloppes et papiers pliés

Le bon panier

- Les élèves disposent d’un message comme celui-ci par exemple.


1
4
5

Le bon panier

- Ils doivent choisir le panier « correspondant au message », c'est-à-dire « qui permet de colorier tous les œufs comme le message… »

Enveloppes et papiers pliés

- Des enveloppes comportant des jetons dont le nombre est écrit sur l'enveloppe
- Des papiers pliés en deux avec un nombre visible et une grille dessinée au verso, dont le nombre de cases est indiqué au recto
- Consigne :
  - Prendre deux enveloppes
  - Trouver la grille qui permettra de placer tous les jetons
  - Vérification des résultats en mettant les jetons dans les cases de la grille

Une progression en germe à la maternelle

- Dans le « bon panier »
  - Comptage en évitant la somme
  - Surcomptage
  - Quelques faits numériques mémorisés
- Enveloppes et papiers pliés
  - Surcomptage avec l'aide des doigts
  - Découverte de faits numériques
    - 1+n
    - n + n
    - (n-1) + n

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	3	4	5		7					
3	4	5	6	7	8					
4	5		7	8	9					
5	6	7	8	9	10	11				
6	7				11	12	13			
7	8					13	14			
8	9							16		
9	10								18	
10										

Les systèmes de numération

Principes et situations de référence

Rappels sur l'écriture des nombres entiers

Les différents systèmes de numération

Une situation d'introduction

- Avec les quatre symboles : * £ ¤ ¥
  - Inventer un système de numération.
  - Décrire les règles de fonctionnement de ce système.
  - Préciser les limites et les avantages.

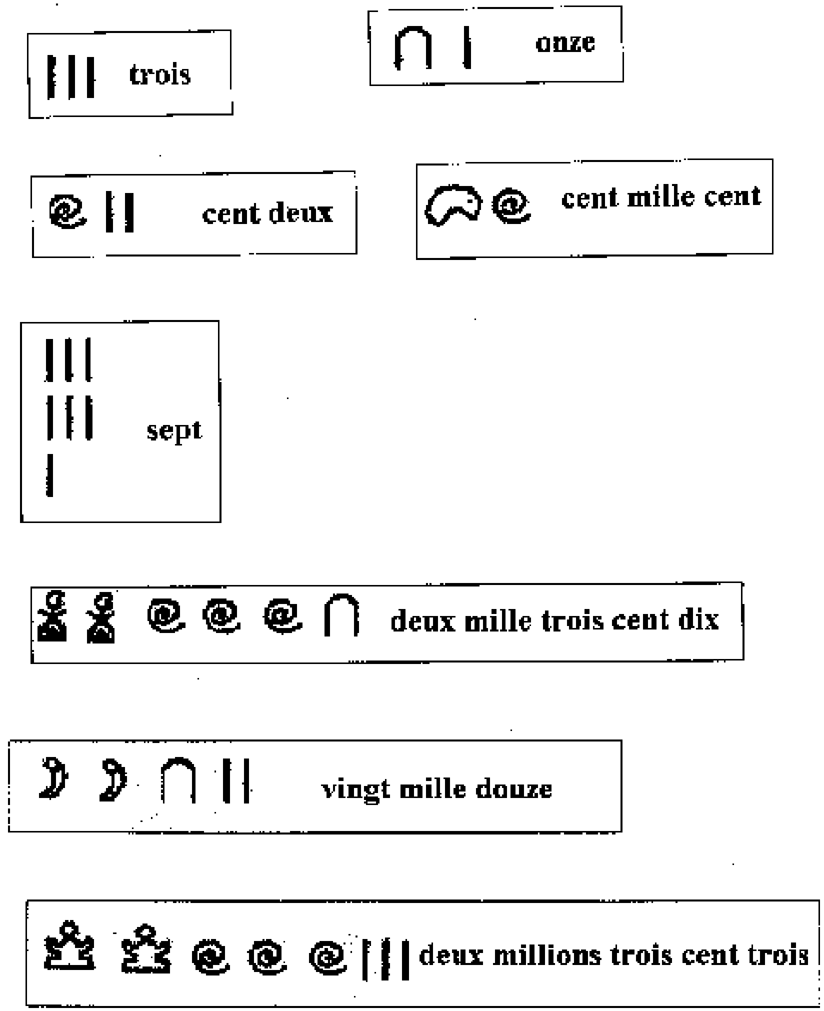
Une première réponse : le système égyptien (voire romain)

- Chaque symbole représente une puissance de dix (voire de cinq)
  - * $\longrightarrow 1 = 10^0$
  - £ $\longrightarrow 10 = 10^1$
  - ¤ $\longrightarrow 100 = 10^2$
  - ¥ $\longrightarrow 1000 = 10^3$
- On écrit autant de fois que nécessaire les symboles, on fait des additions implicites,
  - Exemple **3452** = (1000 + 1000 + 1000) + (100 + 100 + 100 + 100) + (10 + 10 + 10 + 10 + 10) + (1 + 1) $\longrightarrow$ **¥ ¥ ¥ ¤ ¤ ¤ ¤ £ £ £ £ £ * ***
- On ne peut pas écrire les nombres supérieurs à 9999.
- Des essais ne respectant pas les règles implicites fonctionnant ci-dessus :
  - Jouer sur le sens de l'écriture (par exemple vertical) : *
    - Signifie 10000 ¥
    - Mais alors un nombre pourrait avoir deux écritures…
    - Par exemple, 100 peut s'écrire : ¤ et £
      £

Les systèmes d'addition

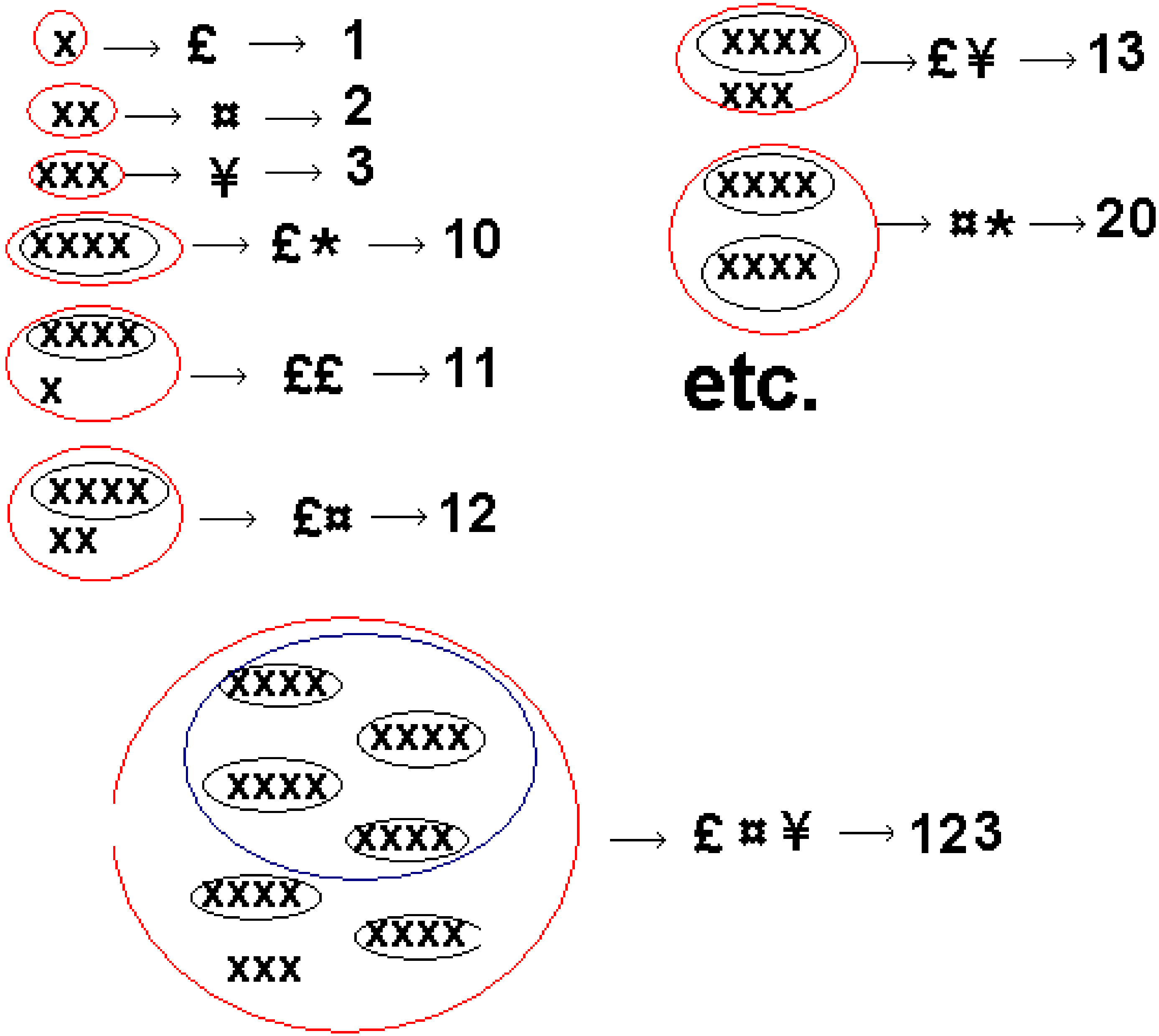
- Les règles de fonctionnement
  - Les chiffres représentent les puissances de la base (principale : en général dix ou auxiliaire : souvent 5).
  - Les opérations implicites : des additions (plus rarement des soustractions).
  - On écrit autant de fois que nécessaire (à concurrence de la valeur de la base) les chiffres.
  - On ne peut pas écrire tous les nombres (car il y a potentiellement un nombre infini de puissances de la base).
  - L'ordre n'est pas nécessaire (us et coutumes).

Numération egyptienne

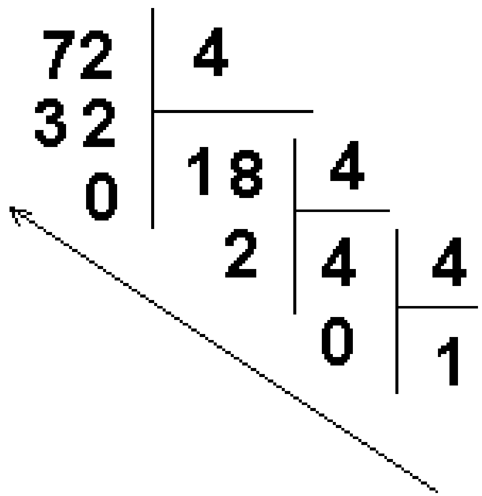


Le système romain

- Des règles de fonctionnement
  - Deux bases
    - une base 10
    - une base auxiliaire 5
  - Un ordre partiel
  - Des additions (et des soustractions, « dérives »)
  - Des chiffres représentant les puissances des bases :
    - I pour un, V pour cinq, X pour dix,
    - L pour cinquante, C pour cent, D pour cinq cents,
    - M pour mille, (et ensuite ????)
  - Pas de zéro mais des fractions en base douze… et des abaques pour les opérations.


x → £ → 1
xx → ¤ → 2
xxx → ¥ → 3
xxxx → £* → 10
xxxx x → ££ → 11
xxxx xx → £¤ → 12
xxxx xxx → £¥ → 13
xxxx xxxx → ¤* → 20
etc.
xxxx xxxx xxxx xxxx xxxx xxxx xxx → £¤¥ → 123

Une autre réponse : un système positionnel avec « 0 » en base quatre

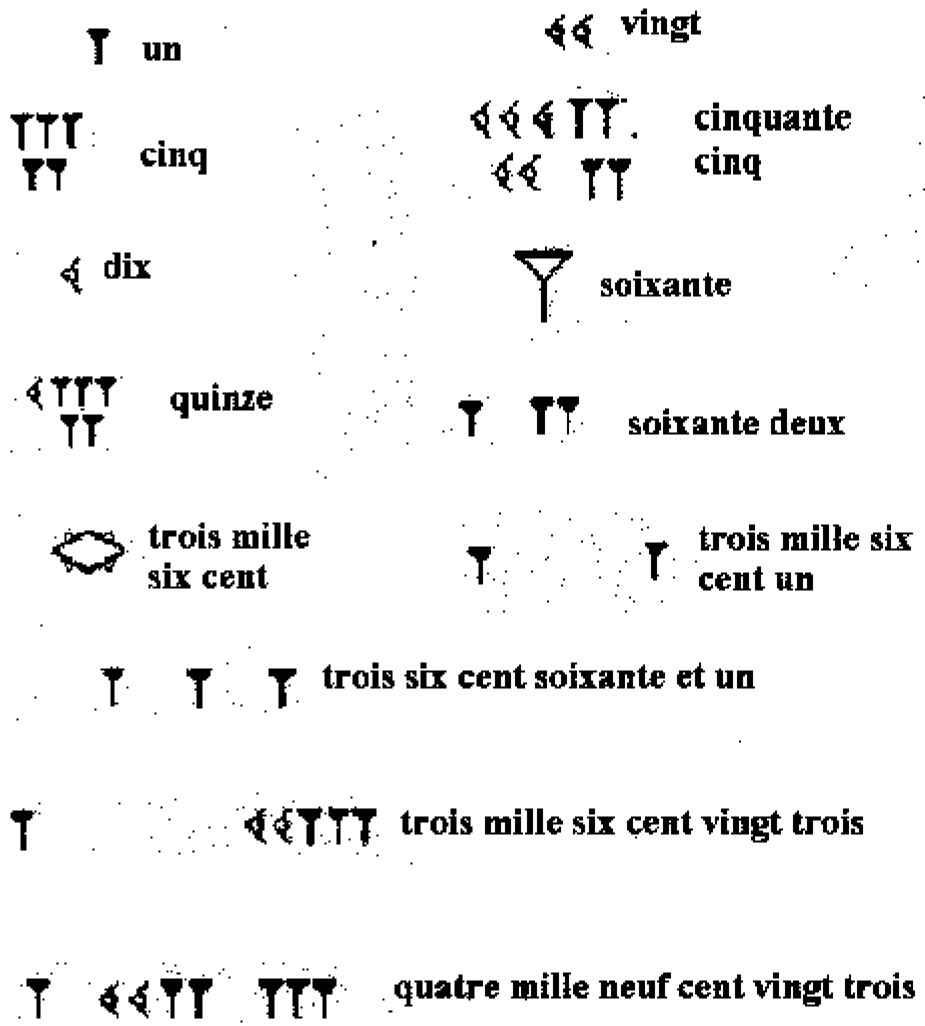


64 4^3	16 4^2	4 4^1	1 4^0
1	0	2	0
£	*	¤	*

$72 = 1 \times 64 + 0 \times 16 + 2 \times 4 + 0 \times 1$

Les systèmes de position

- Des règles de fonctionnement :
  - Les chiffres représentent les coefficients multiplicatifs des puissances de la base (**base principale** : en général dix, parfois vingt ou soixante ou **base auxiliaire** : souvent 5 parfois dix)
  - Les opérations implicites : des additions et des multiplications
  - On n'écrit que les coefficients multiplicatifs sauf en cas d'absence de zéro (Babylone) (éventuellement à concurrence de la valeur de la base)
  - On ne peut pas écrire tous les nombres en cas d'absence de zéro (Babylone).
  - L'ordre est indispensable.


un
vingt
cinq
cinquante cinq
dix
soixante
quinze
soixante deux
trois mille six cent
trois mille six cent un
trois six cent soixante et un
trois mille six cent vingt trois
quatre mille neuf cent vingt trois

Une deuxième situation : la numération orale

- Écrire la liste des mots permettant d'écrire les nombres avec des mots

Une liste incomplète

- Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize
  - Dix-sept,
- Vingt, trente, quarante, cinquante, soixante
- Vingt et un
  - Quatre vingts
- Cent, mille, million, millard, billion, trillion, etc

Trois statuts des mots

- Un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize (coefficients multiplicatifs des puissances de la base)
  - Dix-sept,
- Vingt, trente, quarante, cinquante, soixante (concaténation des puissances de la base et des coefficients multiplicatifs des puissances de la base)
  - Vingt et un
  - Quatre vingts
- Cent, mille, million, millard, billion, trillion, etc (puissances de la base)

Système de numération avec des mots-nombres

- Les bases :
  - Base dix avec base auxiliaire mille
  - Des traces de bases " anciennes ": seize, vingt
- Trois types de chiffres représentant respectivement :
  - Les puissances de la base : dix, cent, mille, million, etc. (lesquels ?)
  - Les coefficients multiplicatifs des puissances de la base: zéro, un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf, dix, onze, douze, treize, quatorze, quinze, seize (parfois utilisés localement)
  - Des concaténations des deux précédents: vingt (pour deux dix), trente (pour trois dix), quarante, cinquante, soixante.
- Opérations implicites: multiplications, additions…
- On ne peut pas écrire tous les nombres.

Trois systèmes de numération

- Les systèmes d'addition (les plus "primitifs ")
  - Les systèmes alphabétiques (grec, etc.)
  - Les systèmes égyptien, romain (plus complexe), etc.
- Les systèmes de position :
  - Notre numération chiffrée (écrite avec des chiffres)
  - Les systèmes babylonien, maya, etc.
- Les systèmes polynomiaux ou hybrides
  - Notre système de numération avec des mots-nombres (d'autres « chiffres »)
  - Certains systèmes asiatiques (sino-japonais, etc.)

Des situations de référence

Des situations de référence

- Les situations d'échanges pour travailler l'écriture du nombre,
- Les situations de groupements (rendus nécessaires quand il s'agit de dénombrer des collections importantes),
- Les situations qui amènent à repenser les groupements par rapport aux échanges,
- Les situations de découverte du point de vue algorithmique (dans les deux systèmes de numération) qui amènent à regarder comment s'enchaînent les écritures,
- Les situations d'exploration des règles de la numération orale (écrite avec des mots traduits par des nombres),
- Les situations autour du passage de la numération écrite (chiffrée) de position à la numération orale (utilisant des mots),

Les situations d’échanges

- Ces situations sont incontournables au cycle 2.
- Elles permettent d’explorer les règles d’échanges qui justifient le système de numération de position.
- Au CP c’est la situation de type « jeu du banquier ».
- Au CE1, c’est le « jeu du caissier ».
- L’évolution se traduit au niveau de la règle d’échanges (un contre cinq, puis un contre dix) et tout le travail sur la monnaie.

Les situations de groupements

- Les groupements sont rendus nécessaires quand il s'agit de dénombrer des collections importantes.
- Pour le CP, il s'agira de construire des stratégies pour dénombrer rapidement et de manière fiable des collections de 40 à 100 objets, au CE, de plusieurs centaines voire de milliers.
- Ces situations amènent à constater que l'utilisation des paquets de dix puis des paquets de paquets va faciliter la détermination de l'écriture du cardinal qui pourra être d'abord traduit sous la forme d'une écriture additive.
- L'évolution du CP au CM2 se fait au niveau du passage de collections réelles à des collections représentées sous différentes formes.
- Dans ERMEL les situations « les fourmillions » (CP), « les cahiers » (CE1), « les craies » (CE2), « les trombones » (CM1) et « les tickets de cantine » (CM2) entrent dans cette catégorie.

Les situations qui amènent à repenser les groupements par rapport aux échanges

- Il s'agit de répondre à la question : à quoi sert la numération ?
  - à lire dans l'écriture d'un nombre des informations liées aux échanges ou aux groupements qui ont été effectués ;
  - à structurer les ensembles de nombres à partir de leurs écritures canoniques mais aussi à partir de décompositions plutôt canoniques ;
  - à construire des algorithmes opératoires efficaces ;
  - à faciliter l'usage des systèmes métriques.

Les situations qui amènent à repenser les groupements par rapport aux échanges

- Au travers des évaluations, on constate un déficit en CE2 et en sixième
  - « Dans 238, combien de paquets de dix ? »
  - 50 % réussissent à répondre en CE2 mais peu lisent directement la réponse « sur le nombre ».
  - En sixième, on observe 80 % de réussite et seulement un élève sur deux qui mobilise des connaissances sur la numération.

Les situations de découverte du point de vue algorithmique

- À traiter dans les deux systèmes de numération : amener à regarder comment les écritures des nombres se transforment de un en un
- Toutes les activités autour des compteurs (avec des chiffres ou avec des mots) et des calculatrices entrent dans cette catégorie en liaison avec un travail avec les abaques.
- Un travail autour des familles de nombres comme la situation du « jeu du château » en CP / CE1.
- La structuration des nombres est également en jeu dans les situations utilisant la droite numérique comme « les fils numériques » ou encore celle qui consiste à fabriquer le « livre du million » : chaque page contient mille nombres (famille des mille).

Les situations d'exploration des règles de la numération orale

- Numération écrite avec des mots traduits par des nombres
- Il s'agit de faire travailler les élèves sur ce qui distingue les deux systèmes de numération.
  - Construire un dictionnaire de nombres
  - Construire une simulation de « compteur » adaptée à la numération orale (écrite avec des mots)

Les situations d'exploration des règles de la numération orale

- Déterminer le nombre de « chiffres » (d'étiquettes) nécessaires pour écrire les nombres entiers jusqu'à un nombre donné 10^n.
- Utiliser ces étiquettes pour écrire la suite des nombres entiers, déterminer les régularités, la variation de la longueur des écritures, (faire une frise), etc.
- Une écriture d'un nombre N étant donnée, quelles étiquettes faut-il changer pour écrire : $N + 1$, $N - 1$, $N + 10$, $N + 20$, …, $N + 10^n$, $N + a10$ avec $0 < a < 9$, $2N$, $10N$, $20N$, $10^n \times N$, etc.

Les situations d'exploration des règles de la numération orale

- exemple : 17×10^n
- dix-sept ↔ 17
- cent soixante dix ↔ 170
- mille sept cent ↔ 1 700
- dix sept mille ↔ 17 000
- cent soixante dix mille ↔ 170 000
- un million sept cent mille ↔ 1. 700 000
- dix sept million ↔ 17 000 000
- cent soixante dix million ↔ 170 000 000
- etc.

Les situations d'exploration des règles de la numération orale

- Un nombre étant donné par son écriture chiffrée, combien faut-il d'étiquettes pour l'écrire ?
- Un nombre étant donné oralement ou par écrit (avec des mots), déterminer le nombre de chiffres nécessaires pour l'écrire.
- Test : construire simultanément des suites de nombres (de 1 en 1, de 2 en 2, de 10 en 10, de 100 en 100, etc…) en numération chiffrée et numération orale
- Un nombre étant donné oralement, écrire ce que l'on entend avec des chiffres, retrouver l'écriture canonique.

Les situations autour du passage de la numération écrite (chiffrée) de position à la numération orale

- On ne peut se limiter à des dictées de nombres. Un travail spécifique est à mener.
- Exemple : « les mots nombres » sur ERMEL
  - 2347 lu « deux mille trois cent quarante-sept »
  - soit 2 – 1000 – 3 – 100 – 40 – 7
  - 2000 + 300 + 47
  - 2347

Les unités de numération

Les travaux de Christine Chambris et Frédérick Tempier

Une manière de poser le problème

- Écrire, dans le tableau des unités de masses : cinq kilogrammes quatre décagrammes

kg	hg	dag	g

- Écrire, dans le tableau de numération, le nombre : cinq milliers quatre dizaines

milliers	centaines	dizaines	unités

Une manière de poser le problème

- Écrire, dans le tableau des unités des masses : cinq kilogrammes quatre décagrammes

kg	hg	dag	g
5	0	4	

- Écrire, dans le tableau de numération, le nombre : cinq milliers quatre dizaines

milliers	centaines	dizaines	unités
5	0	4	0

Exercices et représentations des élèves

- Pour faire les photocopies de l'école, il faut 8564 feuilles de papier. Les feuilles sont vendues par paquets de 100. Combien de paquets faut-il acheter ?
  - La 3e position indique les centaines (5), la 4e position indique les milliers (8) donc les dizaines de centaines (80) , donc il y a 85 centaines de feuilles, il faut donc 86 paquets de 100 feuilles.
- Combien de sachets de 100 g de farine peut-on remplir avec un sac de 4 kg de farine ?
  - 4 kg = 4000 g = 40 centaines de g = 40 sachets
- Le nombre de centaines de 8 734 est…
  - La 3e position indique les centaines (7), la 4e position indique les milliers (8) donc les dizaines de centaines (80) , donc il y a 87 centaines
- 4,8 kg = … hg (système métrique, masse)
  - 4,8 kg = 4800 g = 48 centaines de g = 48 hg
- En fait quatre modalités, contextes, cadres d'un même problème de numération : convertir un nombre de milliers en centaines
  - Les raisonnements précédents reposent tous sur la relation entre milliers et centaines et ,selon les exercices, sur une interprétation des préfixes métriques.

Les unités de numération

- Les mots : unités, dizaines, centaines, milliers, etc. désignent des unités de compte, appelées unités de numération.
- Ces unités désignent les puissances de la base dix sans recourir aux notations exponentielles 10^n ou 1000.
- Les relations entre unités sont :
  - de types simples : 10 unités = 1 dizaine ; 10 centaines = 1 millier, etc.
  - Ou plus complexes : 1 millier = cent dizaines ;

ou encore 4 milliers = 4 fois dix centaines = 40 centaines

L'aspect positionnel et le système métrique

Voici pour commencer une nouvelle tâche de numération. Il faut répondre à la question : « combien y a-t-il de petits cubes ? »

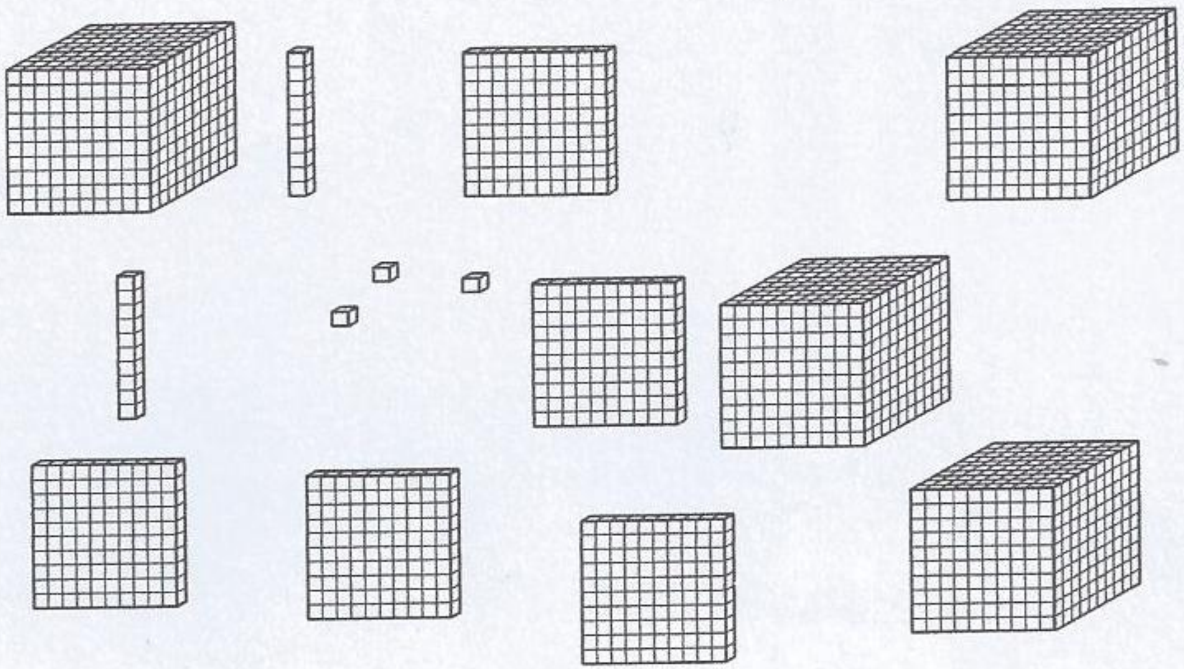


Figure 5 – Assemblage de petits cubes (matériel multibase représenté en perspective)

Deux techniques

Technique 1

- **Compter les petits cubes dans les gros cubes** : mille, deux mille, trois mille, quatre mille puis écrire 4 000.
- Compter les cubes dans les plaques : cent, deux cents, trois cents, quatre cents, cinq cents puis écrire 500.
- Compter les cubes dans les barres : dix, vingt petits cubes puis écrire 20.
- Compter les petits cubes : un, deux, trois petits cubes puis écrire 3.
- Production de l'écriture :

  $4000 + 500 + 20 + 3$
- Réduction de cette écriture (éventuellement à l'aide d'un tableau de nombres) ou par le calcul

Technique 2

- **Compter les gros cubes** : un, deux, trois, quatre puis écrire :

  $4 \times 1\,000$.
- Compter les plaques : un, deux, trois, quatre, cinq

  puis écrire 5×100.
- Compter les barres : un, deux, puis écrire 2×10.
- Compter les petits cubes : un, deux, trois petits cubes puis écrire 3
- Production de l'écriture :

  $4 \times 1000 + 5 \times 100 + 2 \times 10 + 3$
- Réduction de cette écriture (éventuellement avec un tableau de nombres) ou par le calcul

Une troisième technique : utiliser les unités de numération

- Étape 1 : compter en milliers, centaines, dizaines et unités de cubes
- Étape 2 : traduire en chiffres directement le résultat de ce comptage :
  - 4 milliers 5 centaines 2 dizaines 3 unités
- Ou prendre en compte la position des chiffres indiquée par l'ordre 4 – 5 – 2 – 3 soit 4523
- On peut aussi traduire par 4 mille 5 cent vingt trois (en système oral de numération).

Faire le lien entre numération et système métrique

- On peut faire le lien avec les conversions de longueurs par exemple 5 km 6 hm 8 dam 3 m en prenant en compte le fait que 5 km c'est 5 milliers de mètres… et la position des chiffres.
- Idem pour décomposer 427 m en m, dm et cm en prenant en compte le lien position unités de grandeurs
- Comparer les tableaux de numération et de système métrique des grandeurs simples
- Reprendre l'exemple des petits cubes en disant que ces derniers pèsent 1 g, combien pèse le tout ?

Utiliser les unités de numération

- Pour compléter 5 km 6 hm 8 dam 3 m = … m
  - Étape 1 : associer unités métriques et unités de numération
    - 1 dam = une dizaine de mètres, un hectomètre = 1 centaine de m, …
    - Donc 5km 6 hm 8 dam 3 m = 5 milliers de mètres, 6 centaines de mètres,
  - Étape 2 : associer écriture chiffrée et unités de numération donc … = 5683 m
- Idem pour décomposer 427 cm en m, dm, cm (mélange des deux étapes avec prise en compte de la position des chiffres renvoyant aux unités métriques)

Calcul mental et construction de connaissances numériques

Voir Conférence Christine Mangiante

Les opérations posées

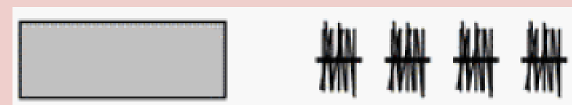
Pourquoi apprendre les techniques opératoires (algorithmes de calcul posé) ?

- Ce qui a justifié leur maintien :
  - Trop tôt pour supprimer ou réduire considérablement (pressions sociale et autres) ces apprentissages mais il est important de:
    - les relativiser, il existe d'autres formes de calcul ;
    - les construire et les justifier ;
    - prendre en compte le moment où on doit les automatiser.
  - C'est un moment privilégié pour revenir sur et approfondir l'apprentissage de la numération.
  - Ce sont des algorithmes complexes qui constituent de fait une première initiation à l'algorithmique.
  - C'est une occasion de revenir sur l'intelligence du calcul (comme le montre l'exemple de la division qui peut renvoyer à des soustractions successives ou des multiplications à trou).
  - Elles se construisent non pas contre mais avec et en parallèle avec les techniques de calcul mental.

Travaux de Frédérick Tempier

site ***Enseigner la numération décimale***

Enrichir les pratiques

Situation de dénombrement de collections	V1 : Dénombrer une collection « en vrac »	
	V2 : Dénombrer une collection totalement groupée	
	V3 : Dénombrer une réunion de deux collections	1ère collection : 2M 8C 1D 3U 2ème collection : 4C 1M 2U. Nombres paris : 31215, 3215, 3315, 4215
Situation de commande de collections	V1 : Commandes de bûchettes	Il nous faut 2615 bûchettes, mais le marchand n'a plus de bûchettes par millier. Combien faut-il commander de centaines de bûchettes, de dizaines de bûchettes et de bûchettes seules ?
	V2 : Commandes de timbres	Le directeur de l'école de Villebois doit commander 2647 timbres. Combien doit-il commander de plaques de 100 timbres ?

ENSEIGNER LA NUMÉRATION DÉCIMALE

Une ressource pour les enseignants de CE2, CM1, CM2 et 6ème

A+ A A−

recherche...

ACCUEIL | 1. DÉNOMBRER | 2. COMMANDER | 3. GRANDS NOMBRES | PROLONGEMENTS | EN SAVOIR PLUS

Accueil

Partant d'un constat de difficultés chez les élèves à prendre en compte un aspect essentiel de notre système de numération écrit, l'aspect décimal, ainsi que d'un manque de propositions à ce sujet dans les manuels courants (en savoir plus), nous proposons un scénario global permettant de travailler les principes de notre numération écrite (position et décimalité) ainsi que des activités pour le mettre en œuvre dans la classe.

Un scénario global

Dénombrer une collection

Une collection « en vrac » *(avec des objets matériels) : « Combien y a-t-il de bûchettes dans cette collection qui est devant nous ? »*

Une collection totalement groupée *(les unités de numération désignant des groupements d'objets) : « Combien y a-t-il de cubes dans une collection de 3 milliers de cubes, 5 centaines de cubes et 2 cubes seuls ? ».*

Une collection partiellement groupée : *« Quel est le montant en euros d'une somme de 3 milliers d'euros, 12 billets de 100 euros et 4 billets de 10 euros ? »*

Dénombrements et conversions sans contexte : *« 5 centaines + 4 milliers + 7 unités = … ? » ou bien : « 2 milliers + 31 centaines + 7 unités = … ? » ou encore : « 4 milliers = … centaines ? ».*

Commander une collection

Commandes sans contrainte : « *des bûchettes sont vendues par milliers, centaines, dizaines et unités. On souhaite en commander 2615. Que peut-on commander ? »*

Commandes avec contraintes :

- « le marchand n'a plus de bûchettes par milliers. On souhaite commander 3052 bûchettes. Que peut-on commander ? ».

- « le marchand a des bûchettes par milliers mais il n'en a plus par centaines. Que peut-on commander ? », etc.

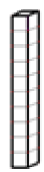
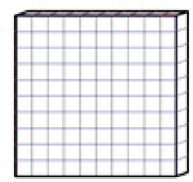
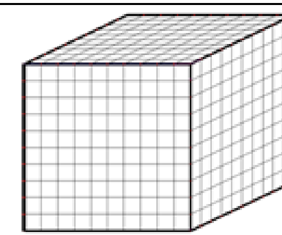
- Autres contextes : « Combien faut-il de billets de 100 euros pour payer une somme de 2079 euros ? », etc.

Sans contexte : *Trouver différentes décompositions de 3421 en utilisant les unités de numération (milliers, centaines, …).*

Ce scénario se décline en 4 principales étapes (2 étapes pour le dénombrement et 2 étapes pour les commandes) pour chacune desquelles nous propositions **une situation d'introduction, des exercices et problèmes et des éléments de synthèse.**

Page d'accueil du site ***Enseigner la numération décimale (http://numerationdecimale.free.fr)***

Unité	dizaine	centaine	millier
			

Unité	dizaine	centaine	millier
			

Unité	dizaine	centaine	millier
			

Des enjeux importants

- Insuffisance des connaissances de nombreux élèves à l'entrée en cycle 3
- Importance d'un travail spécifique sur les nombres inférieurs à 10 000 en visant une compréhension fine des premières unités jusqu'au millier.
- Faire des choix (préparation et mise en œuvre en classe) :
  - Sur l'usage du matériel de numération : entre contextualisation (pour donner du sens aux unités) et décontextualisation (pour généraliser).
  - Sur l'usage des désignations d'un nombre : dire le nom du nombre, l'écrire sans le dire, utiliser une lecture « chiffres à chiffres », le dire en unités, l'écrire en unités (avec abréviations), …
  - Sur l'usage du système d'unités : travailler en unités simples ou en unités (exemple pour 12c : 1200 ou 1m 2c ?)
  - Sur l'usage du tableau de numération : le montrer, le cacher, le laisser à disposition des élèves ? Quelles règles d'usage : possibilité d'écrire des nombres supérieurs à 10 dans une colonne ? Ecriture des 0 dans le tableau ? …

Les objectifs

Savoir lire et écrire les grands nombres en appui sur la décomposition en unités, milliers, millions …

S'approprier les relations entre unités dans différents contextes (quantités, ordre, calcul …)

Savoir se passer du tableau de numération ou l'utiliser de façon raisonnée

Enrichir l'apprentissage des grands nombres pour renforcer les acquis de numération et préparer l'apprentissage des décimaux

Savoir produire des décompositions variées de nombres

Savoir situer un grand nombre sur la droite graduée de manière exacte ou approchée

Calculer mentalement avec des grands nombres « ronds » pour renforcer les relations entre les nombres

https://padlet.com/frederick_tempier/grandsnombres

Extension : les grands nombres

Les enjeux du calcul mental, la part de l'automatisme, un travail sur les pré-requis

Les grands nombres entiers

- Plus de 90% des élèves de sixième savent écrire un nombre entier inférieur à 10 000 (Ed. Pr. ou non)
- En revanche, quand on dépasse 10 000, on note une baisse de
  - 20 points (hors Ed. Pr.)
  - 30 points (Ed. Pr.)
- En fait, entre un quart et un tiers des élèves ne savent pas écrire un grand nombre entier en sixième.

Les grands nombres entiers

- Les programmes prennent en compte cet élément en ménageant une progression dès le cycle 2 qui prévoit notamment un autre découpage de l'apprentissage des nombres et un lien affirmé entre les mesures de grandeurs et la numération (C. Chambris), en effet :
  - la difficulté se situe à partir de 10 000 : avant il existe des noms spécifiques pour chaque unité de numération : unité, dizaine, centaine, millier.
  - Le recours à des bases auxiliaires (mille, million, milliard) : la question se pose pour les unités dix mille, cent mille et se pose à nouveau pour les millions, les milliards, etc.

II. Ruptures et continuités : des nombres entiers aux nombres décimaux

Les enjeux du calcul mental, le paradoxe de l'automatisme, un travail sur les pré-requis

Des résultats des évaluations

Les nombres décimaux

- À l'entrée en sixième, moins d'un élève sur deux réussit à passer d'une écriture décimale d'un nombre décimal à une de ses écritures fractionnaires.
- Des notions qui restent difficiles à construire (régularité internationale) :
  - Comparer deux nombres décimaux,
  - Situer un nombre sur la droite numérique,
  - Multiplier et diviser par 10, 100, 1000,
  - Calculer avec des nombres décimaux.

Des repères

Définitions des nombres décimaux

- D1 : Un nombre est un nombre décimal si et seulement si une de ses écritures décimales comporte une partie décimale finie. (C'est-à-dire ne comportant que des zéros à partir d'un certain rang).

- D2 : Un nombre est un nombre décimal si et seulement si une de ses écritures fractionnaires est une fraction décimale (c'est-à-dire le quotient d'un entier par une puissance de 10, $d = a/10^n$)

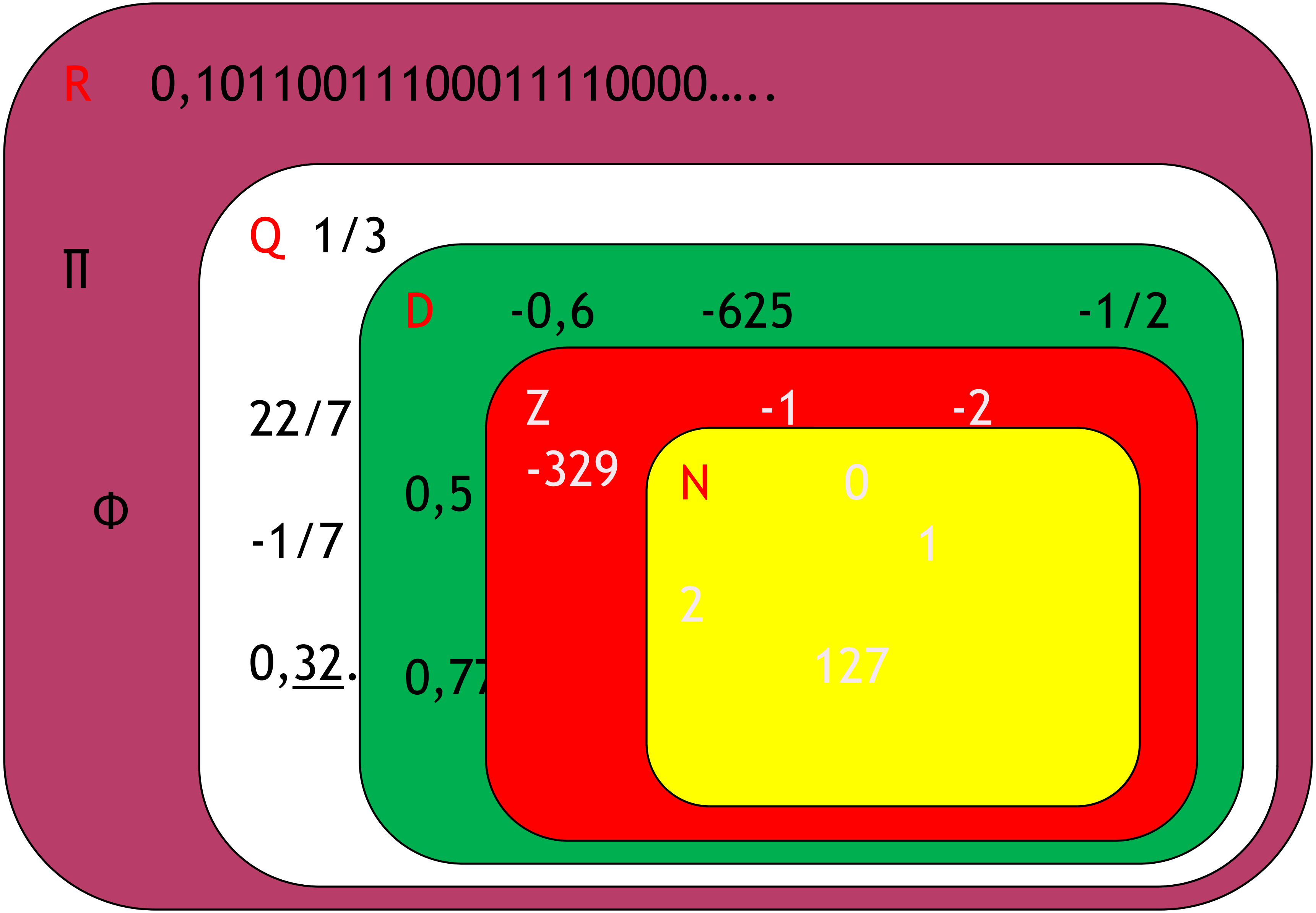
Définitions des nombres rationnels

- D'1 : Un nombre est un nombre rationnel si et seulement si une de ses écritures décimales comporte une partie décimale infinie périodique. (C'est-à-dire ne comportant que des chiffres se répétant dans le même ordre à partir d'un certain rang).

- D'2 : Un nombre est un nombre rationnel si et seulement si une de ses écritures fractionnaires est une fraction (c'est-à-dire le quotient d'un entier par un entier non nul q = a/b avec b dans Z*)

Propriétés

- Nous avons les inclusions (cf. schéma page suivante) :
  - N est inclus dans Z
  - Z est inclus dans D
  - D est inclus dans Q
  - Q est inclus dans R
- Il existe des réels qui ne sont pas des rationnels : 1,0100110001110000 1111……
- D est dense : entre deux décimaux distincts, il existe toujours un autre décimal distinct des deux premiers
- D est partout dense dans R


R
0,1011001110001111000.....
π
Φ
Q
1/3
22/7
-1/7
0,32...
D
-0,6
-625
-1/2
0,5
0,77
Z
-1
-2
-329
N
0
1
2
127

Cheminements cognitifs et itinéraires cognitifs

- L'ensemble des résultats sur les nombres décimaux confirme et complète les difficultés mises en avant par la recherche en didactique des mathématiques sur l'apprentissage des nombres décimaux (Brousseau, 1980, 1981; Grisvard et Leonard, 1981, 1983; Perrin-Glorian, 1986; Bolon, 1992, 1996; Roditi, 2001, 2007; Chesné, 2014)
  - Des résultats sur les procédures erronées de comparaison des décimaux
  - Des degrés apparents d'expertise à dépasser
- De réelles difficultés conceptuelles qui necessitent des itinéraires cognitifs mieux pensés :
  - du temps et une progressivité les prenant en compte,
  - des situations de traitement adaptées pour les surmonter,
  - une connaissance et un traitement particulier des erreurs.

Principales conceptions sur les nombres décimaux

- C1 : Les nombres décimaux sont un autre codage des nombres entiers

  2,37 m = 237 cm

- C2 : Les nombres décimaux sont des couples d'entiers (séparés par une virgule)

  2 euros 50 centimes = 2,50 €

- C3 : il existe deux catégories de nombres : les entiers et les autres (nombres à virgule)

Des explications et des principes pour construire une progression sur les décimaux

Les enjeux du calcul mental, le paradoxe de l'automatisme, un travail sur les pré-requis

Nombres décimaux et obstacles didactiques

- Les connaissances sur les nombres entiers font obstacle à la connaissance des nombres décimaux
  - Tout naturel a un successeur alors que D est dense (entre deux décimaux distincts, il existe un décimal différent des deux premiers)
  - La multiplication dans N est croissante, ce n'est pas le cas dans l'intervalle [0,1] de D

Les différents sens ou aspects des fractions

- Les pays anglophones font d'autres choix que ceux des programmes français et enseignent plus tôt les 5 aspects des nombres rationnels.
- Van de Walle, (2010); Behr et al (1992, 1993); Kieren (1976, 1980); Vergnaud (1983).
- Finalement, ils repèrent un aspect des fractions en fonction du contexte choisi, ainsi :
  - **La fraction partie/partie d'un tout**, préalable à la compréhension de tous les autres aspects. Il s'agit des fractions inférieures à un. Par exemple : 3/4
  - **La fraction mesure** qui permet d'accéder à des fractions supérieures à 1
    - ex: comme 7/4 c'est 7fois la mesure ¼ d'une unité.
  - **La fraction quotient** est la fraction qui est définie comme le nombre a/b avec (a, b) entiers relatifs et b différent de zéro tel qu'il vérifie b x a/b = a
  - **La fraction ratio (ou rapport)**, 3 billes sur 4 sont vertes, cette fraction exprime un rapport et elle est souvent lue différemment en lisant non pas 3 quarts des billes sont vertes mais 3 billes sur 4 sont vertes.
  - **La fraction opérateur** : c'est la fraction qui opère sur une quantité. Cet opérateur n'a pas de dimension ni d'unités , exprime « c'est les trois quarts de.. » (Vergnaud, 1983).

Des explications

- L'apprentissage ne peut (malheureusement) épouser complètement une organisation des savoirs mathématiques (contraintes sociales)
  - Ces contraintes sont sources d'obstacles.
  - Il existe également des obstacles liés au savoir (obstacles épistémologiques).
- Toutefois il ne faut pas s'en éloigner trop
  - Des choix pédagogiques peuvent entraîner des obstacles didactiques : changement d'unités, les « couches » de D notamment peuvent cacher la densité de D.

Des principes généraux

- Il faut présenter différents points de vue (situations de référence sur les nombres décimaux)
  - Le décimal, fractions décimales, rationnels particuliers
  - Le décimal mesure (référence aux longueurs et aux aires)
  - Le décimal opérateur (ou décimal coefficient d'une fonction linéaire) (agrandissement du puzzle)
  - Le décimal repère (cf. test sur la droite numérique)
  - Le décimal, résultat (approché ou exact d'une division) d'une division
  - Le décimal de la vie courante
- Il est nécessaire de faire le choix de la situation d'introduction et d'en peser avantages et inconvénients.
- Cette situation risque d'être privilégiée.

Des principes généraux

- Justifier l’existence des décimaux
- Les présenter comme de nouveaux nombres : le décimal, rationnel particulier
- Traiter la comparaison des décimaux, les placer sur la droite numérique
- Donner du sens aux opérations, grâce à des situations adaptées
  - Addition et soustraction de nombres décimaux
  - Addition réitérée et multiplication d’un décimal par un entier
  - Multiplication de deux décimaux
  - Division décimale d’un entier par un entier

Les programmes

Nombres et calculs

Nouveautés – Evolution

- Un travail progressif sur les opérations avec les nombres décimaux (notamment la multiplication qui revient en 6e) et sur la division (euclidienne, décimale)
- L'explicitation des propriétés des opérations et l'usage des parenthèses.

Un exemple de progression

- **S’appuyer sur des connaissances « sociales » ou extra scolaires**
- **La situation de référence : situation de partage de longueurs**
- **Fractions et graduations**
- **Fractions et partage d’aires**
- **Les fractions décimales**
- **Travailler avec ces écritures**
- **Passage de l’écriture fractionnaire à l’écriture décimale**
- **Le recours au tableau de numération**
- **Travailler avec ces écritures nouvelles**

- **Comparer les décimaux**
- **Addition et soustraction**
- **Multiplication d'un décimal par un entier**
- **Division avec quotient décimal**
- **Diviser un décimal par un entier**
- **Multiplication de deux décimaux**

III. Du côté des pratiques des enseignants : gérer la tension entre dévolution et institutionnalisation

Les enjeux du calcul mental, le paradoxe de l'automatisme : un travail sur les pré-requis

Trois grandes questions de la profession

- Enrichir les pratiques
- Accroître le confort de l'enseignant
- Trois grandes questions de la profession
  - Installer la paix scolaire
  - Exercer une vigilance didactique
  - Gérer la tension : dévolution /institutionnalisation

Installer la paix scolaire

- Différents modes d'installation qui peuvent marquer la qualité des mathématiques enseignées
- Des exemples :
  - Qualité des mathématiques proposées
  - Qualité de la communication
  - Complicité avec les élèves
- Des activités qui favorisent : le calcul mental

Exercer une vigilance didactique

- Une maîtrise conjointe des contenus mathématiques et des enjeux d'enseignement et d'apprentissage de ces contenus.
- Un ajustement didactique permanent s'exerçant dans les trois niveaux :
  - global (grands choix pédagogiques et didactiques),
  - local (séquence),
  - micro (moments de la séance, gestes, routines).
- Une intégration de savoirs mathématiques et didactiques s'appuyant sur des faits didactiques reconnus.
- Des outils didactiques permettant de lire le réel transformés en vue de l'action d'enseigner.
- Maîtriser les savoirs et les enjeux d'enseignement de ces savoirs
- Mobiliser en actes les connaissances didactiques et mathématiques , savoir lire les productions des élèves, etc.

Exercer une vigilance didactique

- Des connaissances qui s'opérationnalisent dans l'action du professeur pour réaliser des tâches et qui peuvent se décrire en terme de gestes et routines professionnelles
- Une insuffisance en terme vigilance didactique peut être source de différenciation dans la mesure où les mathématiques proposées à la fréquentation des élèves ne sont pas les mêmes (notamment en ZEP où se posent de manière plus cruciale des problèmes de compensation)

Gestion du couple de processus dévolution/institutionnalisation

- Les effets d'une évolution dans les pratiques enseignantes
  - D'un enseignement de type « j'apprends/j'applique » à une prise en compte de la nécessité de faire construire les connaissances
  - Un constat d'une recherche sur l'accompagnement : un gain en dévolution s'accompagnant d'une résistance à l'institutionnalisation qui convoque la vigilance didactique
- Des postures et un changement de posture pas assez travaillés en formation mais aussi en recherche.

Dévolution et institutionnalisation

- Dévolution et enseignement explicite
  - Prescription de la tâche/explicitation de la tâche
  - Ex : Statut et rôle de la manipulation
- Les travaux de Cécile Allard
  - Conceptualisation : décontextualisation et généralisation
  - Exposition de connaissances
- Un moment de l'activité du professeur très difficile à gérer pour les enseignants
  - Adapter et développer le texte du savoir aux tâches et activités mathématiques du moment
  - Penser un texte du savoir à développer sur le moyen terme (un cycle) et dans le cadre d'un enseignement spiralaire
  - Enseignants démunis par un manque de ressources