



MINISTÈRE
DE L'ÉDUCATION
NATIONALE

*Liberté
Égalité
Fraternité*

Livret d'accompagnement de programme

Mathématiques

Avant
4 ans

À partir de
4 ans

À partir de
5 ans

CP

CE1

CE2

CM1

CM2

6^e

5^e

4^e

3^e

2026



Ce livret d'accompagnement du programme de mathématiques du cycle 3, publié au [BOENJS du 17 avril 2025](#) propose des ressources organisées sous la forme de fiches thématiques. Chaque fiche présente une séquence de classe, dans laquelle une ou plusieurs séances sont détaillées. Les exemples proposés abordent certaines priorités ou nouveautés des programmes scolaires.

■ Table des matières

3	Enjeux pédagogiques du cycle 3
4	Recommandations pédagogiques et gestes professionnels associés
5	Proposition de séquence n°1 – Opérer sur des fractions : additionner et soustraire

Cette séquence vise à construire progressivement la compréhension des opérations sur les fractions. Les élèves apprennent d'abord à additionner puis à soustraire des fractions dont les dénominateurs sont différents mais liés par une relation de multiple. L'enseignement s'appuie sur la manipulation, la représentation visuelle et la verbalisation afin de donner du sens aux calculs. Les procédures de mise au même dénominateur sont explicitées étape par étape avant d'être automatisées par des entraînements réguliers. Des problèmes contextualisés permettent ensuite de réinvestir les apprentissages. L'objectif final est de rendre les élèves capables de résoudre des situations variées impliquant des fractions.

15	Proposition de séquence n°2 – Résoudre un problème de proportionnalité
----	---

Cette séquence développe la capacité à reconnaître et résoudre des situations de proportionnalité. Les élèves réactivent d'abord les acquis du CM1 puis découvrent des problèmes nécessitant plusieurs étapes de raisonnement. Les procédures de linéarité multiplicative et additive sont enseignées explicitement et comparées. La verbalisation des démarches est privilégiée afin d'éviter l'application mécanique de techniques. Les situations proposées s'appuient sur des contextes concrets favorisant la compréhension du sens des calculs. L'objectif est que chaque élève puisse choisir la procédure la plus efficace selon les données du problème.

26	Proposition de séquence n°3 – Enseigner les probabilités au CM2
----	--

Cette séquence introduit les premières notions de probabilité au cycle 3. Les élèves apprennent à exprimer une probabilité sous la forme « a chances sur b » et à comparer différents événements. Les activités reposent sur des expériences aléatoires simples, telles que des tirages ou des dispositifs simulant le hasard. Les élèves découvrent progressivement la notion d'équiprobabilité et développent leur intuition probabiliste. L'utilisation d'arbres de dénombrement permet de représenter et analyser des expériences à plusieurs étapes. Les séances mettent également en évidence la notion d'indépendance lors de répétitions d'expériences. L'ensemble vise à construire une compréhension intuitive et raisonnée des phénomènes aléatoires.

Enjeux pédagogiques du cycle 3

Dans la continuité des cycles précédents, au cycle 3, les élèves doivent acquérir de solides bases sur les nombres, qu'ils soient entiers ou non, en comprenant leurs différentes écritures (écritures décimales ou sous forme de fractions) et en développant des savoir-faire pour pouvoir effectuer des calculs mentalement ou par écrit selon les nombres en jeu.

L'enseignement des mathématiques au cycle 3 vise également le renforcement de compétences d'analyse, de raisonnement, de logique et d'argumentation à travers la résolution de problèmes qui est au cœur de l'activité mathématique et fait l'objet d'un enseignement structuré et progressif.

Pour être en capacité de résoudre des problèmes, les élèves doivent pouvoir disposer d'automatismes, c'est-à-dire d'un corpus de connaissances, de procédures et de stratégies immédiatement disponibles. La maîtrise de ces automatismes allège la mémoire de travail des élèves lors de la résolution de problèmes, leur permettant de se consacrer pleinement à des tâches cognitives de niveau supérieur comme la prise d'initiatives, la créativité ou le raisonnement. L'apprentissage de ces automatismes est particulièrement valorisant car il produit souvent des progrès rapides, ce qui engage les élèves dans un cercle vertueux et renforce leur confiance en leur capacité à réussir.

Il est essentiel de trouver un juste équilibre entre le travail sur l'acquisition des techniques, en particulier via les automatismes, et l'ancrage des connaissances en lien avec le sens des notions mathématiques et leur utilisation lors de la résolution de problèmes.

De nouveaux éléments apparaissent dans le programme de mathématiques du cycle 3 comme l'algèbre, les probabilités ou l'initiation à la pensée informatique. Il est essentiel que ces champs soient abordés sans attendre la fin de l'année scolaire afin de permettre aux élèves d'acquérir de solides bases sur ces domaines dont l'étude se poursuivra tout au long du cycle 4 en s'appuyant sur les acquis du cycle 3. L'introduction précoce doit permettre une centration forte sur le sens plutôt que sur des compétences techniques et calculatoires. Ces nouveaux champs d'étude ne remplacent bien évidemment les domaines plus traditionnels : nombres, calcul, résolution de problèmes, géométrie ou grandeurs et mesures qui restent le cœur du programme de cycle 3.

La première séquence de ce document permet d'illustrer le travail attendu concernant le calcul fractionnaire dans le cadre de la nouvelle organisation de l'introduction des fractions à l'école élémentaire. En effet, un travail important est mené en CE1 puis en CE2 sur la notion de fraction, permettant d'aborder au CM1 des éléments plus complexes et techniques tout en appuyant systématiquement les gestes techniques sur le sens sous-jacent comme le montre la séquence proposée. La deuxième séquence porte sur la notion de proportionnalité. Les programmes de CM1 comme ceux de CM2 insistent sur l'importance d'une centration sur le sens sans chercher à développer d'automatismes de calcul. La verbalisation est centrale pour s'assurer que l'action des élèves s'appuie avant tout sur le sens comme cela est illustré dans la séquence proposée. La troisième séquence porte sur le domaine des probabilités, nouvellement introduit au cours moyen. Elle permet d'illustrer précisément les attentes d'un enseignement centré sur le sens et la comparaison d'événement en fonction de leur probabilité, les probabilités sont uniquement quantifiées sous la forme « a chances sur b » au CM2 afin de privilégier le sens en évitant le recours à des automatismes techniques.

Recommandations pédagogiques et gestes professionnels associés

Une démarche d'enseignement structuré et progressif

Les recherches en sciences cognitives montrent que pour apprendre efficacement, les élèves doivent comprendre ce qui est attendu d'eux, identifier les obstacles cognitifs susceptibles de freiner leur progression, et disposer de stratégies adaptées pour les surmonter. Le professeur joue alors un rôle clé en guidant les élèves, en structurant les savoirs, et en leur fournissant des outils concrets pour réussir. Toutefois, si cette démarche peut s'avérer particulièrement efficace, elle ne peut être mobilisée de manière systématique, quels que soient le contenu ou la situation d'enseignement. Son efficacité repose donc sur une mise en œuvre réfléchie, attentive aux spécificités de chaque situation d'apprentissage, des contenus enseignés et des profils d'élèves. Pour que cette approche produise pleinement ses effets, elle doit s'appuyer sur une capacité du professeur à ajuster ses interventions et à différencier ses pratiques. C'est en conjuguant les apports des sciences cognitives avec une fine compréhension des besoins des élèves et une approche pédagogique souple et réactive que l'on crée les conditions d'un apprentissage à la fois efficace et durable.

Ainsi un projet d'enseignement efficace s'appuie sur une démarche progressive permettant d'accompagner l'apprentissage des élèves.

Tout d'abord, il s'agit de s'assurer que les objectifs sont compris des élèves, et que la situation présentée est suffisamment motivante pour leur permettre d'entrer dans l'apprentissage. Par la suite, les activités proposées aux élèves, conçues pour atteindre les objectifs fixés, peuvent dans leur mise en œuvre alterner des phases accompagnées par l'enseignant et d'autres en autonomie. Ces activités se concluent par un temps de structuration des apprentissages « Qu'ai-je appris ? » et de retour réflexif « Qu'ai-je réussi ? Que puis-je faire mieux et comment ? ».

À l'occasion des séances ou séquences suivantes, les acquis sont remobilisés afin de favoriser l'automatisation et la capacité des élèves à transférer les apprentissages, dans d'autres situations.

La place de l'erreur

Lorsque la réponse de l'élève est inexacte, il est essentiel de l'accompagner dans l'identification de son erreur afin qu'il puisse, par exemple, comprendre le principe mathématique en jeu ou améliorer son raisonnement logique. Le professeur favorise, encourage et accompagne la réflexion de l'élève en lui proposant des rétroactions régulières sur son activité, dans le but de le guider progressivement vers une meilleure compréhension de ses démarches.

La place et le rôle de la verbalisation par l'élève

Le professeur encourage et favorise la verbalisation et l'explication des objets d'apprentissage afin d'en assurer une meilleure compréhension et de développer ainsi la capacité à en reconnaître les régularités. Il peut, par exemple, demander aux élèves de décrire ce qu'ils observent et de justifier leurs réponses.

Le suivi et évaluation des progrès des élèves

Suivre régulièrement la progression des élèves dans la compréhension des notions et dans le développement des compétences, non seulement par l'observation directe mais aussi par l'utilisation d'outils d'évaluation, permet d'ajuster les activités en fonction des acquis des élèves, en tenant compte de leurs progrès et de leurs difficultés.

Proposition de séquence n° 1 – Opérer sur des fractions : additionner et soustraire.

Objectifs

- Additionner et soustraire des fractions.

Éléments de progression

Les fractions sont introduites au cours élémentaire avec différents sens :

- pour représenter une partie d'un tout dans le cadre d'un partage de ce tout en parts égales, la fraction étant alors le rapport entre la partie et le tout ;
- pour mesurer des grandeurs, lorsque les nombres entiers ne sont pas suffisants ;
- en donnant aux fractions le statut de nombres qui s'intercalent entre les nombres entiers déjà connus ;
- en calculant des fractions de quantités ou de grandeurs comme deux tiers de 12 € ou trois quarts de 100 mètres c'est-à-dire en donnant aux fractions un statut d'opérateur multiplicatif.

Niveau	Référence au programme et progressivité
CE1	• Savoir interpréter, représenter, écrire et lire des fractions inférieures ou égales à 1. • Additionner et soustraire des fractions de même dénominateur.
CE2	• Savoir établir des égalités de fractions inférieures ou égales à 1. • Additionner et soustraire des fractions.
CM1 / CM2	• Écrire une fraction supérieure à 1 comme la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1. • Écrire la somme d'un entier et d'une fraction inférieure à 1 comme une unique fraction. • Placer une fraction ou la somme d'un nombre entier et d'une fraction inférieure à un sur une demi-droite graduée. • Repérer un point d'une demi-droite graduée par une fraction ou par la somme d'un nombre entier et d'une fraction. • Additionner et soustraire des fractions.
6 ^e	• Additionner et soustraire des fractions. • Multiplier une fraction par un nombre entier.

Enjeux pédagogiques

Avoir introduit les fractions dès le CE1 a pour objectif de donner du temps aux élèves pour s'appropriier ces nouveaux nombres et leur écriture sans chercher à développer de compétences techniques à ce stade mais en veillant à donner du sens à cette nouvelle écriture et à ces nouveaux nombres. Au-delà de la maîtrise des fractions qui est nécessaire dans la vie quotidienne (pour des recettes, de la couture, du bricolage, la gestion d'un budget, etc.), les fractions sont essentielles pour la réussite dans d'autres domaines des mathématiques comme l'algèbre, la proportionnalité, les probabilités, etc. Elles permettent également d'assurer une meilleure compréhension et appropriation de l'écriture décimale avec une virgule.

C'est également une meilleure compréhension qui est visée à travers les opérations telles que l'ajout et le retrait de fractions. Opérer sur ces écritures de façon précoce permet aux élèves de ne pas s'enfermer dans des règles apprises par cœur au détriment du sens. Il est en ce sens essentiel de donner une large place à la verbalisation : 6 oranges + 2 oranges = 8 oranges, 6 dixièmes + 3 dixièmes = 9 dixièmes. En verbalisant et en s'appuyant sur le sens, les élèves sont beaucoup moins tentés d'opérer sur les dénominateurs. Faire coexister l'écriture mathématique et la verbalisation, voire l'écriture littérale, sera pour certains un étayage essentiel. 6 dixièmes + 3 dixièmes = 9 dixièmes ; $\frac{6}{10} + \frac{3}{10} = \frac{9}{10}$

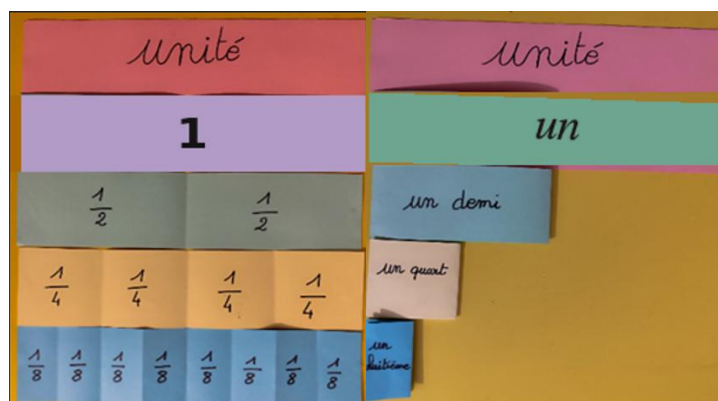
Dans cette séquence lorsque le professeur ou l'élève verbalise la fraction est écrite en toute lettre par exemple : 6 dixièmes + 3 dixièmes = 9 dixièmes.

Prérequis

- La compétence « Additionner et soustraire des fractions » bénéficie d'une approche spiralaire, elle est travaillée depuis le CE1 avec des fractions de même dénominateur puis dès le CE2 avec des fractions ayant des dénominateurs différents, mais avec l'un des dénominateurs multiples de l'autre.
- Au CM1 les élèves rencontrent des fractions supérieures à 1. Cette séquence vient renforcer ces connaissances et savoir-faire.
- L'ajout et le retrait de fractions de même dénominateur aura été entraîné afin d'automatiser cette compétence. Cela met les élèves en confiance en les replaçant dans une situation connue et ils peuvent être amenés à manipuler divers matériels si nécessaire.

Démarche d'enseignement

En répartissant le travail sur les fractions à l'école élémentaire sur quatre années consécutives, le temps est donné d'en assoir la compréhension sans se précipiter vers des applications systématiques dépourvues de sens ou/et vers un degré d'abstraction trop rapidement élevé.



Le passage par les étapes « manipuler », « représenter » et « abstraire » est incontournable. La manipulation est indispensable au cycle 2. Comme le précisent les programmes, dès le CE1, par la manipulation, les élèves commencent « à établir des relations entre les fractions comme le fait que trois fois un sixième font un demi ou que deux fois un sixième font un tiers. » Il est opportun que l'enseignant ait à disposition un matériel collectif qui permet de visualiser les équivalences entre fractions. Certains élèves ont encore besoin d'un support visuel pour être convaincus que $\frac{1}{2}$ est égal à $\frac{2}{4}$.

Au cycle 3, beaucoup d'élèves n'éprouvent plus le besoin de passer par la manipulation ; il n'est donc pas pertinent de la leur imposer. Toutefois, pour certains, elle reste un appui essentiel à la compréhension et doit rester possible. Même lorsque des élèves semblent s'en être affranchis, ils peuvent ressentir le besoin d'y recourir de nouveau face à un problème rencontré pour la première fois ou des fractions moins usuelles ; il importe ainsi de leur en laisser la possibilité. Ce matériel collectif peut devenir individuel. (Cf. Annexes 2 et 3)

On accordera une certaine importance à une verbalisation de ce type : un demi est égal à deux quarts. Comme on a des parts deux fois plus petites, il nous en faut deux fois plus pour désigner la même quantité.

Déroulement de la séquence

Séance	Objectifs	Durée	Modalité
Séance 1 Focus 1	Acquérir une procédure pour additionner des fractions ayant des dénominateurs différents, avec l'un des dénominateurs étant un multiple de l'autre.	40 min	Justification et enseignement explicite de la procédure à suivre pour additionner deux fractions (avec mise au même dénominateur).
Séance 2 à reproduire autant que de besoin	Renforcer la procédure apprise en séance 1.	15 min	Des séries d'items additifs sont proposés. Réduire progressivement le guidage de manière à automatiser la procédure.
Séance 3 et 4	Résoudre des problèmes dans lesquels les données numériques sont des fractions simples.	20 min	Pratique autonome sur des situations problème. La séance 4 introduit des données numériques avec trois dénominateurs différents.
Séance 5 Focus 2 Suivie de plusieurs séances courtes	Soustraire des fractions ayant des dénominateurs différents, avec l'un des dénominateurs multiple de l'autre.	40 min, 15 min pour les suivantes.	Situation problème qui aborde la recherche d'un côté manquant dans le calcul du périmètre d'un triangle. Des séries d'items soustractifs et/ou additifs sont proposés lors des séances courtes.
Séance 6 et plus	Résoudre des problèmes dans lesquels les données numériques sont des fractions simples.	20 min	Pratique autonome sur des situations problème proches de la séance 5.

Focus sur la séance 1 – Additionner des fractions

Objectif

Acquérir une procédure pour additionner des fractions ayant des dénominateurs différents, avec l'un des dénominateurs étant un multiple de l'autre.

Temps 1 - Mise en activité

L'enseignant propose le problème : « Pour préparer le pique-nique de ce midi, Arthur utilise des baguettes identiques : trois quarts de baguette pour le sandwich au poulet et une demi-baguette pour le sandwich au fromage. Quelle fraction de baguette a-t-il utilisée en tout ? ». Durant trois minutes, les élèves recherchent individuellement en utilisant l'ardoise pour représenter les baguettes et proposent une réponse à l'écrit. On acceptera une réponse en écriture littérale ou en écriture mathématique.

Explicitation de la procédure

Au début de ce temps, l'enseignant s'appuie sur la multiplicité des réponses proposées pour apporter la procédure attendue.

Point de vigilance à destination du professeur

Certains élèves qui ne donnent pas de sens à l'écriture chiffrée pourraient proposer une égalité fausse. Par exemple pour $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$, un élève pourrait ajouter les numérateurs entre eux, les dénominateurs entre eux et obtenir le résultat erroné $\frac{4}{6}$. Or, c'est justement cette intuition qu'il faudra contrecarrer en verbalisant et en revenant à l'analogie avec les pommes et les voitures (cf. procédure ci-dessous).

D'autres élèves qui recourent à la manipulation de bandes ou la représentation pourraient proposer $1 + \frac{1}{4}$. Dans un premier temps, l'enseignant insiste pour que la réponse soit formulée avec une seule fraction.

L'enseignant manipule des bandes de papier pour rendre visible chaque étape de la procédure.

L'enseignant met en évidence la difficulté en notant en toutes lettres : 3 quarts + 1 demi = ?

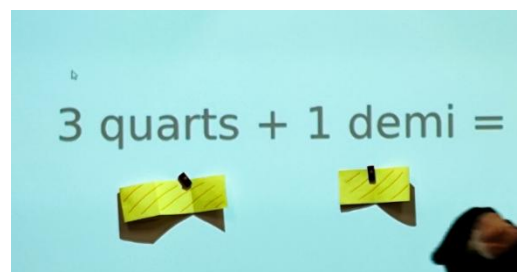
Il verbalise sa pensée : « Comment peut-on ajouter 3 quarts et 1 demi ? Je ne peux pas ajouter 3 pommes et 1 voiture.

Je vais prendre trois quarts dans ma première bande. Des quarts, c'est quand il en faut 4 pour retrouver l'unité. Je vais donc partager l'unité en quatre parts égales. Je plie la bande en deux parts égales puis encore en deux.

Je vais prendre un demi dans la deuxième bande. Les demis, c'est quand il en faut deux pour retrouver l'unité. Je partage donc l'unité en deux parts égales en la pliant bien bord à bord.

Je mets bout à bout les deux morceaux. Je ne peux toujours pas savoir combien ça fait car j'ai trois quarts et un demi.

Je ne peux pas ajouter des pommes et des voitures mais je peux ajouter des pommes et des pommes ou des voitures et des voitures.



Je vais donc d'abord faire en sorte d'avoir des quarts et des quarts. Si je plie à nouveau le demi en deux, je remarque que 1 demi c'est la même chose que deux quarts.

Si je remplace un demi par deux quarts, j'obtiens 3 quarts et 2 quarts et ça je sais faire, ça donne 5 quarts.

Ainsi pour additionner des fractions qui n'ont pas le même dénominateur, je dois en renommer une ou plusieurs pour qu'elles aient le même dénominateur. »

Production de la trace écrite

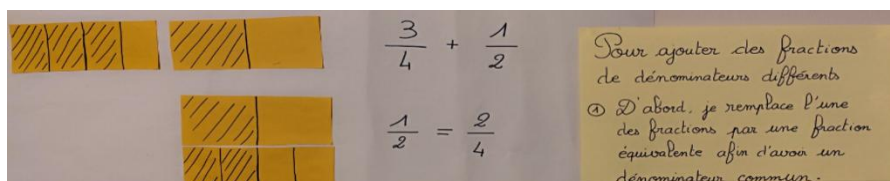
Point de vigilance à destination du professeur

La trace écrite prend la forme d'un affichage collectif (cf. annexe 1). Elle sera, lors des séances suivantes, complétée par ce qui relève de la soustraction. C'est à ce moment-là qu'elle sera écrite par les élèves.

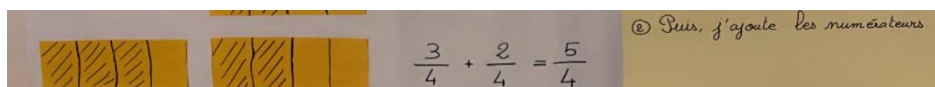
L'enseignant annonce l'objectif de ce temps : « Nous allons reprendre ensemble les étapes pour additionner deux fractions de dénominateurs différents et ainsi rédiger la trace écrite. »

A partir de l'énoncé précédent et du matériel de représentation utilisé lors du temps 1, l'enseignant vient questionner sur les différentes étapes par lesquelles il est passé pour les mettre en lumière :

« Comme on ne peut pas additionner des voitures et des pommes, on ne peut additionner des quarts et des demis. Alors, que fait-on en premier ? Je fais en sorte d'avoir le même dénominateur. Je sais que 1 demi c'est pareil que 2 quarts. » L'enseignant débute la trace écrite :



« Dans un deuxième temps seulement, je peux répondre à la question car 3 quarts et 2 quarts cela donne 5 quarts. » L'enseignant complète la trace :



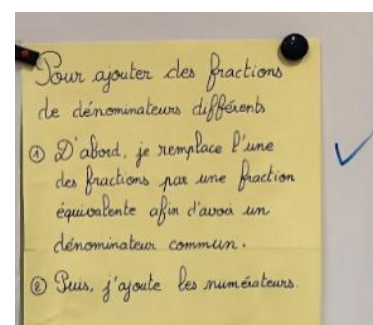
Temps 2 – Mise en activité des élèves

De manière à cibler précisément l'objectif, l'enseignant propose successivement des items calculatoires dépourvus de contexte pour l'ensemble du groupe classe :

1 demi + 5 quarts

2 quarts + 3 huitièmes

L'enseignant insiste pour que la trace écrite soit pleinement exploitée. Il vient à cet effet, cocher les unes après les autres les étapes de réalisation. Le matériel collectif qui permet de visualiser les équivalences entre fractions peut encore servir d'étayage pour certains élèves.



Ainsi, l'enseignant contraint dans un premier temps le passage par toutes les étapes y compris l'égalité des fractions équivalentes avant de laisser certains élèves plus autonomes sur ces items :

3 quarts + 3 demis

1 demi + 5 huitièmes

2 tiers + 5 sixièmes

2 sixièmes + 4 tiers

2 huitièmes + 3 demis + 1 quart

Quelques items seront repris collectivement de manière à verbaliser puis assoir la procédure en prenant toujours appui sur la trace écrite.

Temps 3 – Retour réflexif

Un temps de bilan permet de revenir sur la séance. L'enseignant questionne puis propose des feedbacks adaptés quant à l'application de la procédure enseignée.

Présentation synthétique de la séance 2

Objectif

Renforcer la procédure enseignée pour additionner des fractions ayant des dénominateurs différents, avec l'un des dénominateurs étant un multiple de l'autre.

L'enseignant propose des items similaires à ceux de la séance 1, toujours sans contexte.

1 tiers + 4 sixièmes =

1 demi + 7 dixièmes =

5 quarts + 3 demis =

3 cinquièmes + 4 dixièmes =

4 neuvièmes + 1 tiers =

5 demis + 7 quarts =

1 sixième + 2 tiers =

Les élèves répondent sur l'ardoise.

Cette procédure doit être automatisée. Il s'agit donc de la proposer régulièrement sur la semaine qui suit lors de séances courtes de calcul mental afin de l'ancrer dans la durée.

Une fois ces procédures enseignées, il convient de les réinterroger régulièrement afin qu'elles ne soient pas oubliées.

Exemple de séances courtes

L'enseignant propose d'abord des calculs du type : $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} =$ pour lesquels les élèves ont entre 30 secondes et une minute, sur ardoise, pour faire le calcul, écrire et entourer le résultat.

Puis, l'enseignant passe à des tests de fluence sur feuille, où on vise 6 à 8 calculs en 8 minutes. L'étape intermédiaire qui permet d'associer une fraction à une fraction équivalente doit à ce stade être mentalisée pour ne laisser place qu'au résultat final.

$\frac{1}{4} + \frac{3}{8} =$	$\frac{2}{5} + \frac{1}{10} =$
$\frac{1}{3} + \frac{5}{6} =$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{2} =$
$\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$	$\frac{1}{2} + \frac{3}{10} =$
$\frac{1}{8} + \frac{1}{2} =$	$\frac{1}{4} + \frac{4}{8} =$

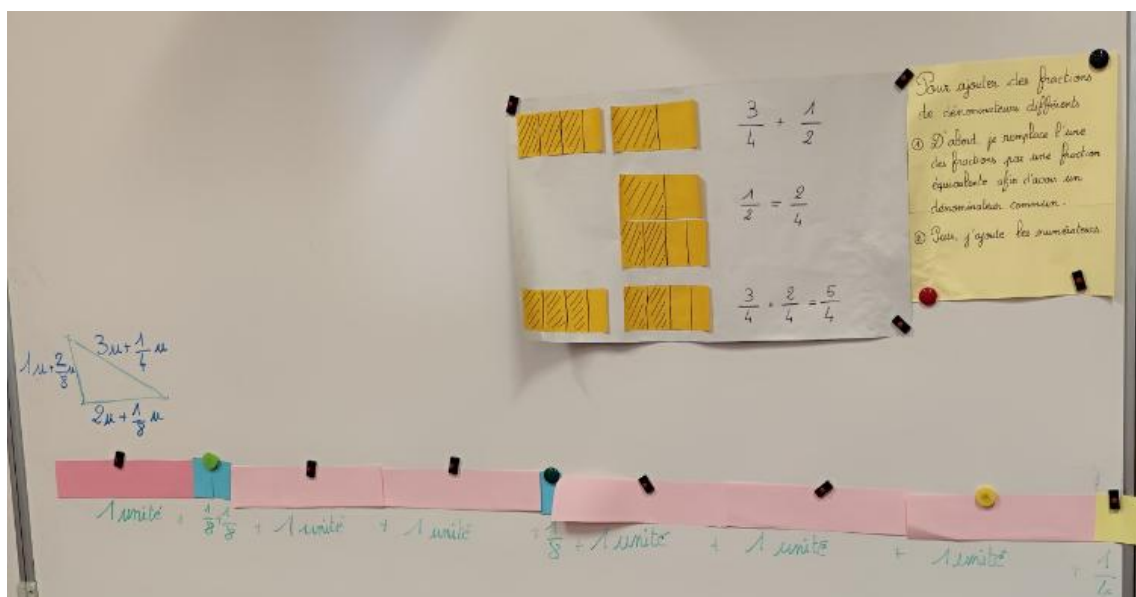
Présentation synthétique des séances 3 et 4

Objectif

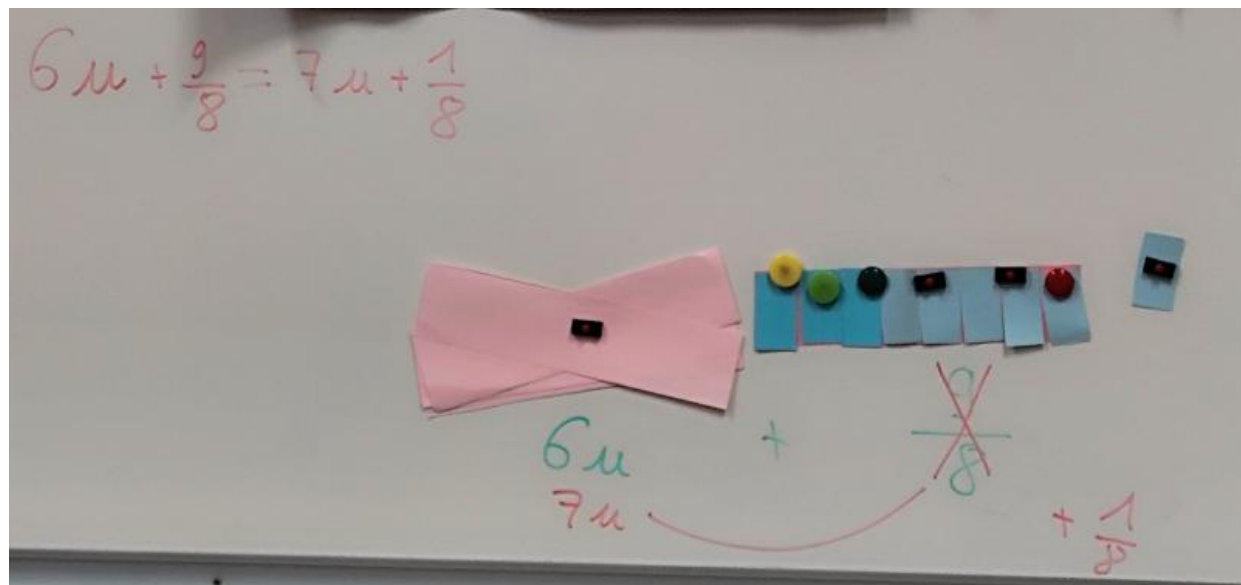
Renforcer, en contexte, la procédure enseignée pour additionner des fractions ayant des dénominateurs différents, avec l'un des dénominateurs étant un multiple de l'autre.

L'enseignant propose un problème du type « Johanna a tracé un triangle dont les côtés mesurent $1 + \frac{2}{8}$, $3 + \frac{1}{4}$ et $2 + \frac{1}{8}$. Quelle est la mesure du périmètre du triangle ? » et s'assure de la bonne compréhension du concept et du terme périmètre par les élèves. Dans un souci de clarification et de manière à simplifier la tâche des plus fragiles, l'enseignant choisit l'écriture de la réponse attendue soit une seule fraction, soit un entier + une fraction inférieure à 1.

Trois minutes sont laissées aux élèves afin de répondre à la question sur leur ardoise.



Lors du temps de retour, l'enseignant insiste sur la verbalisation de la procédure enseignée en séance 1, notamment sur les équivalences de fractions mais également sur l'associativité convoquée. L'enseignant a recours à la manipulation de bandes pour la vérification ainsi que pour la désignation des diverses écritures.

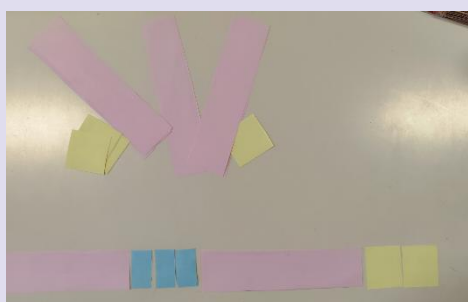


Afin de consolider la procédure, il est indispensable de proposer un nombre d'items conséquent (cf. annexe 4) en prenant toujours appui sur un questionnement du type : « Est-ce que je peux additionner directement 1 quart et 1 huitième ? ».

On peut répéter une seconde fois cette séance en faisant varier les données numériques et en introduisant des items avec trois dénominateurs du type : $1 + \frac{1}{12}$, $3 + \frac{1}{6}$ et $2 + \frac{1}{3}$.

Différenciation

A ce stade, la manipulation individuelle est encore indispensable pour certains élèves.



Les bandes de papier permettent de se représenter la situation, de visualiser l'associativité mais aussi les équivalences de fractions (cf. Annexe 3).



Focus sur la séance 5 – Soustraire des fractions

Objectif

Soustraire des fractions ayant des dénominateurs différents, avec l'un des dénominateurs multiple de l'autre.

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

Mise en recherche

L'enseignant propose le problème : « Pour le pique-nique de ce midi, Arthur a à sa disposition $\frac{3}{2}$ baguettes identiques. Il a utilisé $\frac{5}{4}$ de baguette pour préparer les sandwiches. Quelle fraction de baguette reste-t-il ? »

Durant environ 3 minutes, les élèves s'approprient le problème et recherchent individuellement.

Enseignement explicite de la procédure

L'objectif de ce temps est de montrer aux élèves que ce qui est valable pour l'addition l'est aussi pour la soustraction en verbalisant une bonne procédure pour inhiber une procédure intuitive incorrecte. Par exemple, pour $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$, un élève pourrait soustraire les numérateurs entre eux ainsi que les dénominateurs entre eux et obtenir le résultat $\frac{2}{2}$.

Avant de valider ou invalider chacune des réponses proposées, l'enseignant prend en charge la résolution du problème en explicitant son raisonnement : il enseigne ainsi la procédure attendue.

Une verbalisation de ce type peut donc être envisagée : je dois calculer $\frac{3}{2} - \frac{5}{4}$. Comme pour l'addition de fractions de dénominateurs différents, je ne peux pas soustraire des pommes et des voitures. Je suis obligé de remplacer l'une des fractions de manière à avoir un dénominateur commun. Ainsi, je dois remplacer $\frac{3}{2}$ par $\frac{6}{4}$. Je peux maintenant calculer $\frac{6}{4} - \frac{5}{4}$, ce qui me donne $\frac{1}{4}$.

Institutionnalisation de la procédure

L'enseignant complète la trace collective débutée en séance 1 pour inclure la procédure relative à la soustraction de fractions de dénominateurs différents (cf. annexe 5).

Soustraire des fractions de dénominateurs différents

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{4}$$

① D'abord, je remplace l'une des fractions par une fraction équivalente afin d'avoir un dénominateur commun.

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$$

② Puis, j'~~ajoute~~^{soustrais} les numérateurs

$$\frac{6}{4} - \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

Temps 2 – Mise en activité des élèves

Les élèves s'exercent individuellement sur des items de ce type :

$$\frac{3}{2} - \frac{5}{4}$$

$$\frac{13}{8} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{21}{6} - \frac{5}{3}$$

$$\frac{18}{5} - \frac{24}{10}$$

L'enseignant circule dans les rangs pour aider si besoin mais aussi pour relever les difficultés récurrentes qui mériteront d'être reprises collectivement. On en profite donc pour verbaliser et assoir la procédure en prenant appui sur la trace écrite.

Temps 3 – Retour réflexif

Lors du temps de retour, l'enseignant et les élèves reviennent sur les étapes de la trace écrite puis ils l'écrivent.

Exemple de séances courtes :

Tout comme cela a été fait suite à la séance 2, l'enseignant vise l'automatisation de la procédure. Il propose des items similaires sur la semaine qui suit lors des temps courts de calcul mental afin d'ancrer la procédure.

L'enseignant propose d'abord des calculs du type : $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} =$ pour lesquels les élèves ont entre 30 secondes et une minute, sur ardoise, pour faire le calcul, écrire et entourer le résultat. La place de la verbalisation reste centrale ainsi que le retour au questionnement « Est-ce que je peux soustraire directement des huitièmes et des quarts ? Est-ce que je peux soustraire 4 voitures et 3 pommes ? »

Puis, l'enseignant passe à des tests de fluence sur feuille, où on vise 6 à 8 calculs en 8 minutes. L'étape intermédiaire qui permet d'associer une fraction à une fraction égale (par exemple : $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$) doit à ce stade être mentalisée pour ne laisser place qu'au résultat final.

Différenciation

Certains élèves pourraient encore avoir besoin d'écrire une étape intermédiaire pour alléger leur mémoire de travail.

Progressivement, l'enseignant propose de mêler des additions et des soustractions.

Présentation synthétique de la séance 6

L'enseignant propose des situations qui visent à entraîner les élèves à additionner et soustraire des fractions de dénominateurs différents. On commence par des situations proches de la séance 5, c'est-à-dire le périmètre d'une figure : Johanna a tracé un triangle de périmètre $7 + \frac{3}{4}$. L'un des côtés a pour longueur $2 + \frac{1}{8}$ et un autre a pour longueur $1 + \frac{1}{2}$. Quelle est la longueur du troisième côté ? ».

On élargit progressivement vers d'autres contextes (cf. annexe 6).

Point de vigilance à destination du professeur

La simplification des fractions n'est pas attendue. Par exemple, on accepte $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{12}{16}$

Proposition de séquence n° 2 – Résoudre un problème de proportionnalité

Objectifs

Savoir résoudre un problème de proportionnalité.

Éléments de progression

Le travail sur la proportionnalité conduit au cycle 3 s'inscrit dans la continuité du travail sur la résolution de problèmes multiplicatifs mené au cycle 2. En effet, les élèves ont déjà résolu des exemples simples de problèmes relevant de la proportionnalité comme « Des tee-shirts coûtent 13 € chacun. Quel est le prix de 6 tee-shirts ? ». Ce n'est qu'à partir du cycle 3 que la notion de proportionnalité est explicitement étudiée

Au cours moyen, la proportionnalité est exclusivement abordée dans le cadre des grandeurs. L'élève apprend à identifier des situations de proportionnalité et à utiliser des raisonnements fondés sur la propriété de linéarité pour la multiplication ou pour l'addition.

Le retour à l'unité n'est introduit qu'en 6°. Pour autant, un élève qui utilise ce type de raisonnement voit sa réponse validée.

Niveau	Progressivité
Cycle 2	• Résoudre des problèmes multiplicatifs.
CM1/ CM2	• Identifier une situation de proportionnalité. • Savoir résoudre un problème de proportionnalité.
6°	• Connaître la définition de la proportionnalité entre deux grandeurs et la mettre en lien avec des expressions de la vie courante. • Identifier si une situation relève du « modèle » de la proportionnalité. • Résoudre un problème de proportionnalité en choisissant une procédure adaptée : propriété de linéarité pour la multiplication ou l'addition, retour à l'unité. • Représenter une situation de proportionnalité à l'aide d'un tableau ou de notations symboliques. • S'initier à la résolution de problèmes d'échelles.

Enjeux pédagogiques

La proportionnalité est une notion essentielle car elle est omniprésente dans la vie quotidienne, que ce soit pour comparer des prix, ajuster une recette, interpréter des données, lire une carte (échelle), ou encore lors du maniement d'unités quotients comme les vitesses ou les débits.

Distinguer des situations de proportionnalité de situations qui ne le sont pas peut être difficile pour certains élèves qui appliquent mécaniquement des procédures sans compréhension réelle, en particulier lorsque

l'énoncé à la forme d'un problème de proportionnalité : « Un orchestre de 20 musiciens met 24 minutes pour jouer un morceau de musique classique. Combien de temps mettra un orchestre de 40 musiciens pour jouer le même morceau de musique ? ». Le recours à un tableau ou à des « techniques » plus ou moins automatisées (produit en croix) peut contribuer à ce que les élèves privilégient les calculs à une résolution s'appuyant sur le sens et la compréhension de l'énoncé. Il est donc nécessaire au cours moyen de privilégier un enseignement progressif, structuré et centré sur le sens des calculs effectués.

Comme en calcul, un des enjeux de la résolution de problèmes de proportionnalité sera de sélectionner parmi plusieurs procédures de résolution la stratégie la plus efficace en fonction des données numériques de l'énoncé et des faits numériques que l'élève connaît.

Éclairages didactiques

La proportionnalité peut être définie comme une relation entre deux grandeurs. Deux grandeurs sont proportionnelles si l'une varie toujours dans le même rapport que l'autre : si l'une est multipliée ou divisée par 2, 3, 4... l'autre est aussi multipliée ou divisée par 2, 3, 4...

Pour résoudre les problèmes de proportionnalité proposés, on enseigne les procédures de linéarité multiplicative, de linéarité additive ou de procédures mixtes qui utilisent les deux successivement :

Procédure	Exemple d'énoncé	Exemple de verbalisation
Procédure de linéarité multiplicative	3 kg de noix coûtent 18 €. Combien coûtent 12 kg de noix ?	« 12 kg de noix, c'est 4 fois plus que 3 kg de noix. Le prix de 12 kg de noix sera donc 4 fois plus élevé que le prix de 3 kg de noix. »
Procédure de linéarité additive	3 kg de noix coûtent 18 €. 5 kg de noix coûtent 30 €. Combien coûtent 8 kg de noix ?	« 8 kg de noix, c'est 3 kg de noix plus 5 kg de noix. Le prix de 8 kg de noix, c'est le prix de 3 kg de noix plus le prix de 5 kg de noix. »
Procédure mixte	10 kg de noix coûtent 60 €. Combien coûtent 15 kg de noix ?	15 kg de noix, c'est 10 kg de noix plus 5 kg de noix. 5 kg de noix, c'est deux fois moins que 10 kg de noix. Le prix de 5 kg de noix, c'est deux fois moins que le prix de 10 kg de noix. Le prix de 15 kg de noix, c'est le prix de 10 kg de noix plus le prix de 5 kg de noix. »

Le programme de CM1 propose des problèmes de proportionnalité dont la résolution passe exclusivement par la procédure de linéarité multiplicative. Exemple : Cinq manuels de mathématiques identiques pèsent 2 kg. Quelle est la masse de quinze de ces manuels ?

Le programme de CM2 s'inscrit dans la continuité du travail mené au CM1 : les savoir-faire développés se consolident et s'enrichissent à travers la résolution de problèmes nécessitant plusieurs étapes et à travers la procédure de linéarité additive. Exemple : « 200 feuilles d'un certain papier ont une épaisseur de 24 mm. Quelle est l'épaisseur de 250 feuilles de ce papier ? »

Le choix a été fait de commencer par des situations problèmes à deux étapes faisant intervenir la linéarité multiplicative pour renforcer ce qui a été travaillé au CM1.

Démarche d'enseignement

Lors de la résolution de situations de proportionnalité, la compétence « Calculer » est fortement sollicitée. S'appuyer sur des procédures et des faits numériques automatisés ainsi que sur une bonne connaissance des propriétés des opérations permet de libérer la charge cognitive des élèves au profit du raisonnement attendu. L'enseignant s'assure en amont que les faits numériques sollicités sont bien installés et que les élèves sont en mesure d'associer diverses écritures du type $4 \times 5 = \dots / 4 \times \dots = 20 / 20 \div 4 = \dots / 20 \div \dots = 4$.

L'élève sait résoudre un problème de proportionnalité lorsqu'il est capable de choisir une procédure adaptée aux nombres présents dans l'énoncé et aux faits numériques qu'il connaît. Pour leur permettre d'atteindre cet objectif, lors de la préparation, l'enseignant doit s'assurer que le champ numérique et les procédures sollicitées peuvent être mis en relation avec l'enseignement du calcul mental (ex : 4 jeux identiques coûtent 70€. Combien coûtent 20 jeux ? Avec cet item, on pourra revenir mobiliser une procédure enseignée (par exemple « Multiplier un nombre par 5 »).

L'enseignement est centré sur la résolution de problèmes qui peuvent être résolus mentalement ou par écrit selon les nombres en jeu.

Déroulement de la séquence

Séance	Objectifs	Durée	Modalité
Séance 1	Résoudre un problème faisant intervenir deux grandeurs proportionnelles, en utilisant une seule fois la propriété de la linéarité pour la multiplication.	25 min	Réactivation des acquis de CM1. Des énoncés sont vidéoprojetés les uns à la suite des autres et les élèves répondent sur l'ardoise.
Séance 2 Focus 1	Résoudre un problème de proportionnalité à deux étapes faisant intervenir la linéarité multiplicative.	40 min	Mobilisation de la procédure de linéarité multiplicative dans des problèmes à deux étapes où les données ne sont pas multiples les uns des autres.
Séance 3 (et plus si besoin)	Résoudre un problème de proportionnalité à deux étapes qui font intervenir la linéarité multiplicative.	20 min	Consolidation de la procédure dans des problèmes à deux étapes dans des contextes variés.
Séance 4 et 4bis Focus 2	Résoudre des problèmes de proportionnalité à une étape faisant intervenir la linéarité additive.	40 min, 15 min.	Découverte de la propriété de linéarité additive dans des problèmes à une étape. La représentation en barres y est convoquée. La séance 4 bis permet aux élèves de réinvestir la procédure de linéarité additive.
Séance 5	Résoudre un problème de proportionnalité à deux étapes en utilisant deux procédures de linéarité.	40 min	Mobilisation des deux procédures installées dans des problèmes qui permettent de les combiner.
Séance 6 (et plus si besoin)	Automatiser la résolution d'un problème de proportionnalité à deux étapes.	10 à 20 min	Les modalités peuvent varier (travail mental sur ardoise comme la séance 1 ou travail dans les cahiers comme la séance 3 en fonction des problèmes proposés. Cf. annexe 5 pour des exemples de problèmes.

Présentation synthétique de la séance 1 – Réactivation des acquis de CM1

L'objectif de cette séance est de résoudre un problème faisant intervenir deux grandeurs proportionnelles, en utilisant une seule fois la propriété de la linéarité pour la multiplication.

Point de vigilance à destination du professeur

Les problèmes proposés sont avec des données numériques très simples afin de se centrer sur la procédure.

Il n'y a pas de trace écrite attendue ; la séance est centrée sur la verbalisation.

L'enseignant projette le premier problème de la liste : « Pour faire des crêpes pour 6 personnes, il faut 5 œufs. Combien faut-il d'œufs pour faire des crêpes pour 12 personnes ? » Les élèves recherchent individuellement sur l'ardoise.

Au bout d'une minute, un élève explique comment il a fait pour trouver la réponse : « 12 personnes, c'est 2 fois plus que 6 personnes. Il faudra donc 2 fois plus d'œufs, c'est-à-dire 10 œufs. » Cette verbalisation peut être répétée par d'autres élèves et inscrite au tableau de manière à placer l'ensemble de la classe en réussite pour les énoncés suivants. L'enseignant impose une verbalisation de ce type pour chaque énoncé.

Liste des problèmes soumis aux élèves

- Pour faire des crêpes pour 6 personnes, il faut 5 œufs. Combien faut-il d'œufs pour faire des crêpes pour 12 personnes ?
- 200 g de cerises coûtent 3 €. Combien coûtent 600 g de cerises ?
- Pour faire des crêpes pour 12 personnes, il faut 800 g de farine. Quelle quantité de farine faut-il pour 6 personnes ?
- A vélo, Léa parcourt 3 km en 10 minutes. En continuant à rouler à la même vitesse, quel temps mettra Léa pour parcourir 15 km ?
- J'ai une boîte d'allumettes toutes de même longueur. 6 allumettes mises bout à bout mesurent 20 cm. Quelle sera la longueur de 42 allumettes mises bout à bout ?
- Sur une carte, 12 cm représentent 40 km. Quelle est la distance réelle entre deux villes situées à 12 mm l'une de l'autre sur la carte ?

Focus sur la séance 2 – Découverte de problèmes pour lesquels il est nécessaire d'utiliser deux fois la procédure par linéarité multiplicative

Objectif

Résoudre un problème de proportionnalité à deux étapes qui font intervenir la linéarité multiplicative.

Point de vigilance à destination du professeur

En CM1, les élèves ont été entraînés à résoudre des problèmes de proportionnalité avec des données numériques multiples l'une de l'autre. Ainsi, ils ne mobilisaient qu'une seule fois la propriété de linéarité multiplicative. Exemple : 4 jeux identiques valent 35 €. Combien valent 8 jeux ?

En CM2, Le champ numérique choisi doit permettre d'obtenir deux étapes de linéarité multiplicative comme cela est proposé dans cette séance.

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

Présentation d'un premier problème et recherche individuelle

L'enseignant propose le problème suivant aux élèves « 6 cubes identiques pèsent 16 kg. Combien pèsent 15 de ces cubes ? ». Les élèves réfléchissent individuellement. L'enseignant circule dans les rangs pour relancer les élèves et les maintenir en activité. À ce stade, il n'oriente pas vers la procédure attendue. Aucun étayage particulier n'est proposé, la calculatrice y compris (sauf pour d'éventuels élèves en situation de handicap pour lesquels elle est souhaitable).

Point de vigilance à destination du professeur

De façon à limiter le nombre de procédures possibles et ainsi orienter le retour collectif, il est souhaitable de choisir les données numériques. Ici, 6 et 15 n'offrent pas d'autres alternatives que de passer par 3.

Certains élèves peuvent s'orienter vers une résolution via une procédure incluant une étape de linéarité additive (trouver la masse pour 12 cubes, celle pour 3 cubes et donc les additionner).

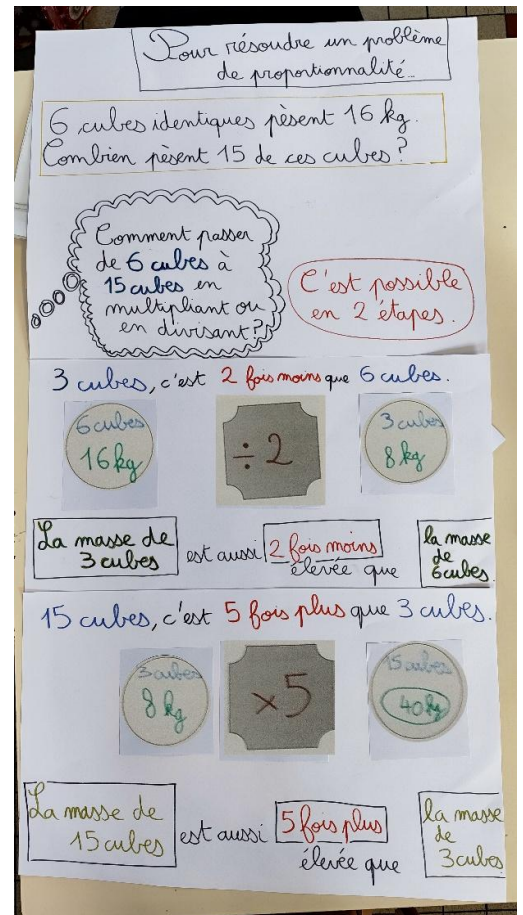
La réponse est validée mais on en reportera l'exploitation lors de la séance dédiée.

Enseignement de la procédure

Après un court temps de réflexion, l'enseignant propose un retour collectif. Il s'appuie sur les observations réalisées lors du temps précédent pour questionner les élèves sur leur procédure. Il valorise et met en avant le raisonnement. Il s'agit d'abord de rappeler que nous sommes dans une situation de proportionnalité en verbalisant « La masse des cubes est proportionnelle au nombre de cubes. Par exemple, si j'ai 2 fois moins de cubes, alors la masse sera 2 fois moins élevée, ou si j'ai 5 fois plus de cubes, alors la masse sera 5 fois plus élevée. »

L'enseignant met donc en avant que la difficulté ici repose sur le rapport entre 6 et 15. Il pose donc la question « 15 cubes, c'est combien de fois plus que 6 cubes ? Cela ne peut pas se faire en une seule étape. » Il s'appuie sur le fait que certains élèves sont passés par 3 avant de multiplier par 5. Dans le cas où aucune proposition de ce type n'a été faite, l'enseignant prend en charge l'explicitation de la procédure attendue. On garde trace de chacune des étapes de cette procédure de manière à passer de cet exemple précis à une généralisation (cf. annexes 2 et 3).

Pour faciliter ce passage du particulier au général, la trace écrite peut être évolutive et adaptable. On fait figurer dans des encadrés ce qui relève du particulier, de l'exemple et qui par un système de caches pourra convenir à d'autres problèmes du même type.



La trace collective réalisée sert de point d'appui pour une pratique plus autonome des élèves.

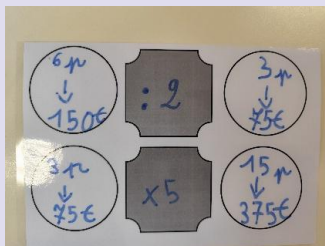
Les élèves écrivent la trace écrite.

Temps 2- Mise en activité des élèves

L'enseignant propose des énoncés de problèmes proches pour remobiliser la procédure avec deux étapes de linéarité multiplicative. Les énoncés sont proposés les uns après les autres.

Différenciation

Pour les élèves les plus en difficulté, l'enseignant propose un système de cadres qui matérialise les étapes de la résolution (cf. annexe 1).



Énoncé n°1 : 6 puzzles identiques coûtent 150 €. Combien coûtent 15 puzzles ?

Énoncé n°2 : 22 porte-clés identiques coûtent 99 €. Combien coûtent 33 porte-clés ?

Énoncé n°3 : 140 sucettes identiques coûtent 35 €. Combien ai-je de sucettes pour 15 € ?

Temps 3 - Retour réflexif

Un temps de bilan permet de revenir sur la séance. L'enseignant questionne puis propose des feedbacks adaptés quant à l'application de la procédure enseignée.

Présentation synthétique de la séance 3 (et plus si besoin)

L'objectif de cette séance est de résoudre un problème de proportionnalité à deux étapes qui fait intervenir la linéarité multiplicative.

Lors de séances courtes, l'enseignant propose des énoncés proches de ceux de la séance 2 (cf. annexe 4). La verbalisation en appui sur la trace écrite sera incontournable lors des phases de retour. Le système de caches de la séance précédente trouvera toute sa place ici (cf. annexes 2 et 3). En fonction des réussites, tous les problèmes n'auront pas à être traités collectivement et une validation directement dans les cahiers pourra être privilégiée.

Différenciation

Pour répondre aux besoins de chaque élève, l'enseignant peut actionner différents leviers :

- le nombre de problèmes proposés ;
- le champ numérique mobilisé ;
- le degré d'autonomie de réalisation, c'est-à-dire que l'enseignant peut regrouper autour de lui des élèves ayant les mêmes besoins.

Focus sur la séance 4 – Découverte de la procédure par linéarité additive

Objectif

Résoudre des problèmes de proportionnalité à une étape faisant intervenir la linéarité additive.

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

Présentation d'un premier problème et recherche individuelle

L'enseignant propose un problème de ce type aux élèves « Pierre, Tarik et Théo achètent des écharpes toutes au même prix. Pierre a payé 52 € pour 4 écharpes. Tarik a payé 117 € pour 9 écharpes. Combien Théo va-t-il devoir payer pour 13 écharpes ? »

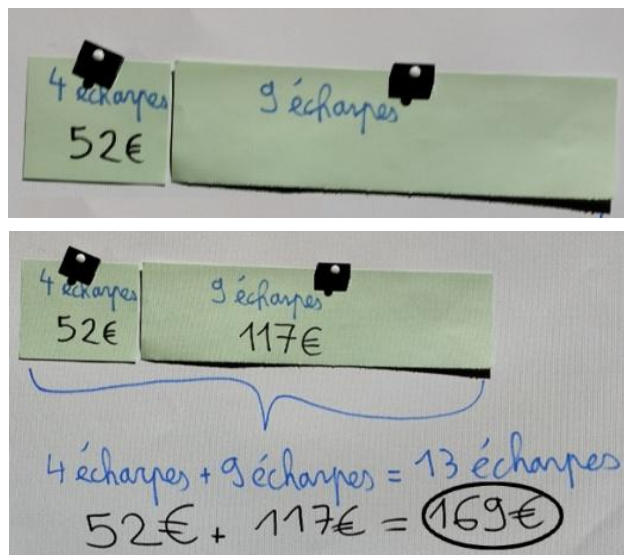
Il annonce explicitement que l'on va utiliser une nouvelle procédure pour résoudre ce problème.

Les élèves réfléchissent individuellement en travaillant sur l'ardoise.

Enseignement de la procédure

Au bout de deux ou trois minutes, l'enseignant propose un temps de retour collectif. Il s'appuie sur les observations réalisées lors du temps précédent pour questionner les élèves sur leur procédure. L'enseignant les fait justifier qu'il s'agit d'une situation de proportionnalité en s'appuyant sur le fait que les écharpes sont toutes au même prix et identiques.

L'enseignant met donc en avant que la difficulté repose ici sur le rapport entre 4 et 13 mais aussi 9 et 13. Il revient à la question « Comment peut-on trouver le prix de 13 écharpes à partir du prix de 4 écharpes et de 9 écharpes ? Il s'appuie sur les élèves qui ont réussi l'exercice sur leur ardoise pour mettre en lumière la propriété de linéarité additive. Le choix de passer par une représentation sous forme de schémas en barre permet de la visualiser facilement et d'y associer une verbalisation du type « Je cherche le prix de 13 écharpes. Je connais le prix de 4 écharpes, c'est 52€.



Je connais le prix de 9 écharpes, c'est 117€.

Le prix de 13 écharpes, c'est donc le prix de 4 écharpes et le prix de 9 écharpes. C'est donc 52€ plus 117€ ».

Cette représentation doit rester visible. Elle servira d'appui pour le temps 2 de cette séance mais également pour la séance 5.

Point de vigilance à destination du professeur

Il est conseillé de laisser apparaître à l'intérieur des calculs les unités des grandeurs manipulées.

Temps 2- Mise en activité des élèves

L'enseignant propose des énoncés de problèmes proches pour remobiliser la procédure.

Énoncé n°1 - Une tour de 6 cubes emboîtables identiques mesure 9 cm. Une tour de 20 cubes emboîtables identiques mesure 30 cm. Combien mesure une tour de 26 cubes emboîtables ?

Énoncé n°2 - Une tour de 6 cubes emboîtables identiques mesure 9 cm. Une tour de 20 cubes emboîtables identiques mesure 30 cm. Combien mesure une tour de 14 cubes emboîtables ?

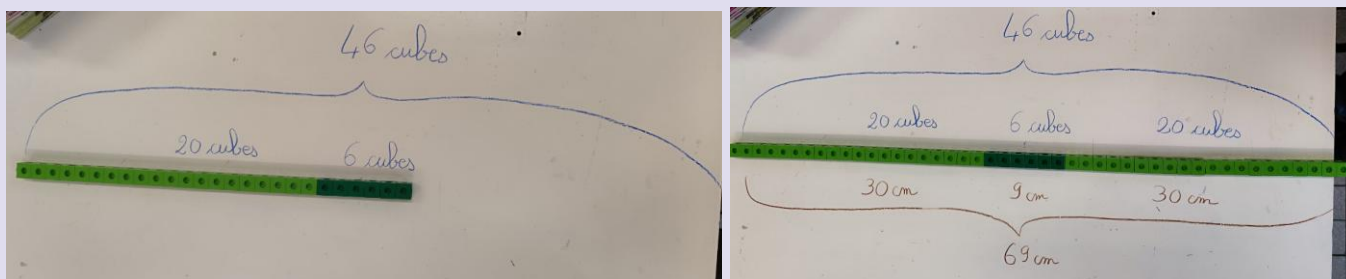
Énoncé n°3 - Une tour de 6 cubes emboîtables identiques mesure 9 cm. Une tour de 20 cubes emboîtables identiques mesure 30 cm. Combien mesure une tour de 46 cubes emboîtables ?

Énoncé n°4 - Une tour de 6 cubes emboîtables identiques mesure 9 cm. Une tour de 20 cubes emboîtables identiques mesure 30 cm. Combien mesure une tour de 32 cubes emboîtables ?

Différenciation

Proposer des énoncés dont le contexte permet un transfert rapide vers des objets manipulables est bénéfique pour certains élèves. La manipulation reste accompagnée d'une verbalisation. L'enseignant accompagne les étapes à effectuer pour passer de ce que l'on sait à ce que l'on cherche. Il habituera donc les élèves à bien identifier le nombre cible et à établir les relations entre les nombres connus afin de l'atteindre.

Par exemple, pour l'énoncé 3, à la manière du compte est bon : « je connais pour 20, je connais pour 6, je dois atteindre 46, comment faire ? »



Temps 3 - Retour réflexif

Lors du temps de retour, l'enseignant s'appuie sur la représentation du schéma en barres pour venir soutenir la verbalisation.

Point de vigilance à destination du professeur

Cette nouvelle procédure devra être remobilisée dans au moins une séance supplémentaire afin que les élèves puissent s'en emparer pleinement. Des énoncés proches de ceux du temps 2 leur seront donc proposés.

Présentation synthétique de la séance 5 – Utiliser deux procédures de linéarité.

Les procédures de linéarité additive et multiplicative ont été enseignées individuellement dans les séances précédentes. Les élèves vont devoir apprendre à choisir, en fonction des contextes et des faits numériques mémorisés, l'enchaînement de procédures qui leur semble le plus efficient.

Dans un premier temps, l'enseignant propose l'énoncé suivant : « On achète 10 pots de riz au lait pour 22 €. Si on veut acheter 15 pots de riz au lait identiques, combien cela coûtera-t-il ? »

Les élèves réfléchissent individuellement sur l'ardoise.

Lors du retour collectif, il met l'accent sur la pluralité des propositions qui peuvent être catégorisées en deux groupes selon les différentes combinaisons de procédures :

deux fois la procédure de linéarité multiplicative

5 pots, c'est 2 fois moins que 10 pots.
Le prix de 5 pots est 2 fois moins élevé que le prix de 10 pots.
Le prix de 5 pots est donc de 11€.
Le prix de 15 pots est 3 fois plus élevé que le prix de 5 pots.
Le prix de 15 pots est donc de 33€.

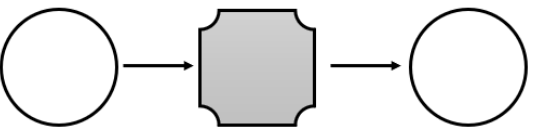
la procédure de linéarité multiplicative puis la procédure de linéarité additive.

5 pots, c'est 2 fois moins que 10 pots.
Le prix de 5 pots est 2 fois moins élevé que le prix de 10 pots.
Le prix de 5 pots est donc de 11€.
Le prix de 15 pots, c'est le prix de 10 pots et le prix de 5 pots. C'est donc 22€ et 11€, soit 33€.

Point de vigilance à destination du professeur

D'autres combinaisons de procédures pourraient être proposées par les élèves. Elles auront été validées individuellement lors du temps de recherche. Afin de ne pas multiplier les possibles, notamment pour les élèves les plus en difficulté, l'enseignant se fixe sur les deux combinaisons ciblées dans le tableau précédent.

Il s'appuie à ce moment sur les traces écrites réalisées pour mettre en lumière ces combinaisons.



Comme , c'est que ,

alors est élevée que .

4 écharpes 52 €	9 écharpes 117 €
4 écharpes + 9 écharpes = 13 écharpes 52 € + 117 € = 169 €	

Dans un second temps, les élèves s'entraînent sur des items qui acceptent les deux combinaisons précédentes. Ces énoncés sont proposés :

- 20 tubes de dentifrice coûtent 35 €. Quel est le prix de 24 tubes de dentifrice ?
- 20 tasses identiques coûtent 44 €. Quel est le prix de 15 tasses ?
- Une voiture consomme 16 L d'essence pour parcourir 200 km. Combien de litres consomme-t-elle pour parcourir 250 km ?
- Un camion consomme 24 L d'essence pour parcourir 200 km. Combien de litres consomme-t-il pour parcourir 150 km ?

L'enseignant a au préalable identifié les compétences des élèves de manière à adapter les modalités :

- Aucun étayage : résolution des problèmes en autonomie ;
- Donner les étapes de résolution à certains élèves : « tu commences par multiplier/diviser ... puis tu additionnes/soustrait ... » ;
- Imposer la résolution par les deux combinaisons possibles.

Présentation synthétique de la séance 6 (et plus si besoin)

L'objectif de cette séance est d'automatiser la résolution d'un problème de proportionnalité à deux étapes. (cf. annexe 5).

Les séances suivantes viennent consolider la résolution de problèmes de proportionnalité à deux étapes. Elles sont à reconduire plusieurs fois, en les espaçant progressivement : à la suite de la séance 5, puis quinze jours plus tard, puis un mois plus tard, puis deux mois plus tard, etc.

Pour aller plus loin

Des énoncés de ce type peuvent être proposés aux élèves :

4 écharpes 52 €

9 écharpes 117 €

En dix minutes, il est demandé aux élèves de recenser un maximum d'issues possibles. Les élèves peuvent ainsi trouver le prix pour 13 écharpes, pour 5 écharpes, pour 8 écharpes, pour 18 écharpes, ... Il sera intéressant d'amener aussi les élèves à débiter par la grandeur prix. Par exemple, combien d'écharpes peut-on acheter avec 26€ ? avec 1170€ ?

L'objectif est de vérifier la capacité des élèves à remobiliser les procédures de linéarité multiplicative et additive en les faisant jouer avec les nombres.

Point de vigilance à destination du professeur

Dans cette séquence les exemples sont souvent contextualisés autour de la monnaie mais d'autres contextes sont possibles (masse, volume, longueur, etc).

Ressources (bibliographie, sitographie)

HERSANT M. (2005). [La proportionnalité dans l'enseignement obligatoire en France, d'hier à aujourd'hui](#). REPERES - IREM. N° 59.

Proposition de séquence n° 3 – Enseigner les probabilités au CM2

Objectifs

- Déterminer une probabilité et l'exprimer sous la forme « a chances sur b ».
- Représenter une expérience aléatoire à deux étapes.

Éléments de progression

Niveau	Progressivité
CM1	• Identifier toutes les issues possibles lors d'une expérience aléatoire simple. • Comprendre et utiliser le vocabulaire approprié : « impossible », « possible », « certain », « probable », « peu probable », « une chance sur deux ». • Comparer des issues d'expériences aléatoires ou des événements selon leur probabilité de réalisation. • Reconnaître des situations d'équiprobabilité.
CM2	• Dans une situation d'équiprobabilité, lors d'une expérience aléatoire simple, exprimer la probabilité d'un événement sous la forme « a chances sur b ». • Comparer des probabilités dans des cas simples. • Comprendre la notion d'indépendance lors de la répétition de la même expérience aléatoire. • Dans des situations d'équiprobabilité, recenser toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire en deux étapes dans un tableau ou dans un arbre afin de déterminer des probabilités.
6 ^e	• Comparer des résultats d'une expérience aléatoire répétée à une probabilité calculée. • Savoir que la probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1. • Calculer et comparer des probabilités dans des situations simples d'équiprobabilités.

Enjeux pédagogiques

- Poursuivre et affiner le travail entrepris en CM1.
- Aborder la répétition d'une même expérience aléatoire.

Apport de connaissances pour le professeur

Le concept de probabilité, abordé pour la première fois dans les programmes de cycle 3, revêt plusieurs aspects et repose sur des notions mathématiques qui dépassent en partie le cadre de l'école élémentaire. Afin d'enseigner avec justesse les premières intuitions probabilistes, il est utile que l'enseignant connaisse les fondements du modèle probabiliste classique et les notions-clés (expérience aléatoire, issues, univers, évènement, probabilité...) dans une perspective mathématique rigoureuse. Ces notions ne relèvent pas du cycle 3 et ne sont donc pas à enseigner. Ce recul permet de mieux comprendre les enjeux didactiques, les limites des modèles proposés aux élèves et la progressivité des apprentissages à construire. cf. annexe 5 reprend ces éléments et développe les autres aspects des probabilités, dites fréquentiste et épistémique (ou subjective).

- Une expérience aléatoire est une situation dont on ne peut pas prédire avec certitude le résultat mais dont on connaît *a priori* les résultats possibles.

Dans ce qui suit, on considérera l'expérience aléatoire suivante : un sac opaque contient 5 boules jaunes, 3 boules noires et 2 boules rouges, indiscernables au toucher. On choisit au hasard une boule dans le sac.

- La modélisation suppose l'idéalisation des objets (ici des boules, a priori parfaitement identiques, indiscernables au toucher).
- Les résultats possibles sont appelés issues.
- Dans l'exemple précédent, les issues sont chacune des 10 boules.
- L'ensemble des issues est appelé univers.
- L'univers de l'exemple précédent est donc l'ensemble constitué des 10 boules du sac : les 5 boules jaunes, les 3 boules noires et les 2 boules rouges.
- Un évènement est un sous-ensemble de l'univers. Il est donc composé d'issues (aucune, une, plusieurs ou toutes) et peut s'exprimer par une phrase.
- Exemples :
 - l'évènement « Obtenir une boule rouge » est le sous-ensemble composé des deux boules rouges ;
 - l'évènement « Obtenir une boule bleue » est l'ensemble vide, il ne contient aucune issue. Cet évènement est qualifié d'impossible ;
 - l'évènement « Obtenir une boule » contient toutes les issues. Cet évènement est qualifié de certain.
- La probabilité d'un évènement est un nombre entre 0 et 1 qui mesure sa prévisibilité, qui peut s'exprimer en écriture fractionnaire, à virgule ou sous forme de pourcentage. Au CM1, les probabilités sont uniquement quantifiées par la qualification d'« une chance sur deux ». Au CM2, les probabilités sont quantifiées en utilisant des expressions de la forme « a chances sur b », où a et b sont des entiers.
- Exemples :
 - la probabilité d'obtenir une boule rouge est égale à $\frac{2}{10}$ (exprimée sous la forme « 2 chances sur 10 » en CM2), c'est à dire $\frac{1}{5}$ ou 0,2 ou encore 20 % ;

- la probabilité de l'évènement impossible est égale à 0 ;
- la probabilité de l'évènement certain est égale à 1, c'est à dire 100 %.
- Plus on répète l'expérience, plus les fréquences observées sont proches des probabilités calculées (c'est la loi des grands nombres).
- Exemple : Si on répète un grand nombre de fois l'expérience (en remettant à chaque fois la boule dans le sac), on obtiendra environ 20 % de boules rouges : plus le nombre de répétitions est important, plus la fréquence observée est proche de 20 %.
- Deux évènements sont dits indépendants lorsque la probabilité de réalisation de l'un ne dépend pas de la réalisation de l'autre.
- Exemples :
 - on choisit une boule au hasard dans le sac, on la remet. On choisit de nouveau une boule au hasard. Les évènements « La première boule est rouge » et « La deuxième boule est rouge » sont indépendants. Que la première boule tirée soit rouge ou non, il y aura 2 chances sur 10 de choisir une boule rouge lors du deuxième tirage.
- En revanche, si on ne remet pas la boule dans le sac après le premier tirage, alors ces deux mêmes évènements ne sont pas indépendants. En effet, si la première boule est rouge alors la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage sera égale à $\frac{1}{9}$ alors que si la première boule n'est pas rouge alors la probabilité de tirer une boule rouge au deuxième tirage sera deux fois plus élevée et égale à $\frac{2}{9}$.

Démarche d'enseignement

Choix didactiques

Le lancer de dés ou de pièces de monnaie, le tirage de jetons ou de boules dans un sac ou une urne opaque, le tirage de cartes dans un jeu de 52 cartes constituent des situations classiques.

Les expériences aléatoires proposées lors des situations d'apprentissages sont présentées de manière idéale. Par exemple, s'il est vrai qu'une pièce de monnaie pourrait tomber sur la tranche, cette possibilité ne sera pas envisagée. Lors du tirage au hasard d'une boule parmi d'autres, l'hypothèse sera faite que les boules sont indiscernables au toucher. Le dé est supposé équilibré. Ces hypothèses sont souvent implicites, il conviendra de les énoncer ou de les rappeler régulièrement.

S'il n'est pas attendu que les élèves utilisent le vocabulaire spécifique aux probabilités (expérience aléatoire, issue, évènement, équiprobable et indépendant), le professeur gagnera à l'employer.

Au CM2, on utilise la formulation « a chances sur b » pour exprimer une probabilité. Sous cette forme, la comparaison par rapport à « une chance sur deux » se justifie en comparant a avec la moitié de b.

Par exemple, une probabilité égale à $\frac{2}{3}$ est désignée par « deux chances sur trois ». Cette probabilité est supérieure à « une chance sur deux », car plus de la moitié des issues réalisent l'évènement. Dès lors, « une chance sur deux » et « trois chances sur six » désignent la même probabilité.

A l'instar du tableau à double entrée, la représentation sous forme d'arbre de dénombrement (arbre des possibles) permet d'énumérer et dénombrer les issues d'une expérience aléatoire à deux étapes. Cette dernière présente en plus l'avantage de pouvoir représenter des expériences à plus de deux étapes. Elle évolue dans la suite de la scolarité vers la représentation d'arbres probabilistes pour faciliter certains calculs plus complexes.

Attendus de fin de séquence

- Dans différentes situations, les élèves expriment une probabilité sous la forme « a chances sur b » ;
- ils comparent des probabilités, en particulier par rapport à « une chance sur deux » ;
- ils utilisent un arbre pour dénombrer les issues d'une expérience aléatoire à deux étapes et déterminer des probabilités.

Déroulement de la séquence

Piste d'évaluation diagnostique

Le professeur réactive les acquis de CM1. A l'issue de cette phase, les élèves :

- ont fréquenté des expériences aléatoires, en particulier avec un dispositif similaire aux bouteilles de l'annexe 1 ;
- connaissent le vocabulaire permettant de qualifier des événements probabilistes (impossible, peu probable, une chance sur deux, probable, certain). En particulier, la probabilité « une chance sur deux » est justifiée par le fait le fait que la moitié des issues réalisent l'évènement ;
- estiment des probabilités à l'aide d'une échelle (cf. annexe 3).

Séance	Objectifs	Durée	Description
Séance 1 Focus 1	Exprimer une probabilité sous la forme « a chances sur b ».	45 min	Introduction d'une nouvelle notion Le contenu mystère : les élèves découvrent des expériences aléatoires dont ils ignorent <i>a priori</i> les résultats possibles. L'expérimentation permet de les convaincre du contenu. Après dévoilement, ils expriment différentes probabilités et les comparent.
Séance 2 (plusieurs fois)	Exprimer, des probabilités, sous la forme « a chances sur b ».	10 min	Entraînement, rituel Questions flashs sur des situations similaires et dans d'autres contextes. Ces séances assurent un retour du niveau de compréhension de la notion précédemment enseignée.
Séance 3 (plusieurs fois)	Comparer et ordonner des probabilités exprimées sous la forme « a chances sur b ».	20 min	Entraînement, rituel Questions flashs sur des situations similaires et dans d'autres contextes. Ces séances permettent de s'assurer de la bonne compréhension des probabilités exprimées, en les comparant et en les ordonnant.
Séance 4 Focus 2	Représenter et exploiter la représentation d'une expérience aléatoire à plusieurs étapes par un arbre.	45 min	Introduction d'une nouvelle représentation Les élèves modélisent une expérience aléatoire à plusieurs étapes, énumèrent les issues et déterminent des probabilités.

Séance	Objectifs	Durée	Description
Séance 5 (plusieurs fois)	Comprendre la notion d'indépendance lors de la répétition de la même expérience aléatoire. Enumérer et dénombrer toutes les issues possibles. Exprimer des probabilités sous la forme « a chances sur b ».	30 min	Entraînement. Questions sur des situations similaires à celles des bouteilles. Les élèves construisent et utilisent un arbre de dénombrement pour modéliser puis calculer des probabilités.
Séance 6 (plusieurs fois)	Enumérer et dénombrer toutes les issues possibles. Exprimer des probabilités sous la forme « a chances sur b ».	30 min	Entraînement. Questions issues d'autres contextes. Les élèves construisent et utilisent un arbre de dénombrement pour modéliser puis calculer des probabilités dans diverses situations.

Évaluation

A l'issue de plusieurs entraînements (séances 2, 3 ou 5), le professeur propose un travail individuel écrit sur feuille qui contient la représentation de cartes.

Pour la séance 2 les élèves écrivent sous chaque carte une probabilité sous la forme « a chances sur b ».

Pour la séance 3, les cartes sont numérotées, ils indiquent la position de l'évènement correspondant sur l'échelle des probabilités en indiquant sa probabilité sous la forme « a chances sur b ».

Pour la séance 5, ils construisent un arbre pour modéliser une répétition d'expérience aléatoire et calculer des probabilités sous la forme « a chances sur b ».

Ces écrits permettent de détecter la nécessité de revenir sur les notions le cas échéant.

Focus sur la séance 1 : a chances sur b.

Sur un principe analogue aux séances 1 et 3 du livret CM1, les élèves expérimentent des retournements successifs de plusieurs bouteilles contenant des billes de différentes couleurs afin d'en déterminer le contenu.

Objectifs

- Exprimer des probabilités sous la forme « a chances sur b » ;
- Comparer des probabilités à « une chance sur deux ».

Matériel

- Des bouteilles opaques contenant chacune quatre billes indiscernables au toucher, avec trois différentes répartitions par couleur. Quand la bouteille est retournée, elle ne laisse apparaître qu'une bille (cf. annexe 1). Contenu des bouteilles :
 - 2 billes noires et 2 billes blanches (bouteille A) ;
 - 1 bille noire et 3 billes blanches (bouteille B) ;
 - 3 billes noires et 1 bille blanche (bouteille C).

- Trois cartes événements à afficher ou projeter représentant des contenus d'urnes pouvant s'assimiler à des contenus de bouteilles, comme celles présentes dans l'annexe 2-C. Contenu des cartes :
 - 2 billes noires et 2 billes blanches ;
 - 2 billes noires et 1 bille blanche ;
 - 1 bille noire et 4 billes blanches.

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite (5 min)

Collectif : présentation et consigne.

Le professeur présente une première bouteille, la bouteille A. Elle contient 2 billes blanches et 2 billes noires. Le contenu est exhibé aux élèves puis remis dans la bouteille. Il est rappelé que la probabilité d'obtenir une bille noire en retournant la bouteille est d'une chance sur deux car la moitié des billes sont noires. Quelques retournements sont éventuellement effectués et le professeur explique que si l'on en fait beaucoup, on obtiendra à peu près autant de billes noires que de billes blanches¹.

Consigne : « J'ai deux autres bouteilles : la bouteille B et la bouteille C. Dans chaque bouteille, j'ai mis 4 billes. Les billes sont soit noires soit blanches. Vous allez devoir dire combien de billes noires contient chacune de ces bouteilles, sans les ouvrir ni regarder à l'intérieur. Il va falloir les retourner de nombreuses fois en mélangeant bien à chaque fois, jusqu'à ce que vous soyez convaincus du nombre de billes noires à l'intérieur. Quand on s'arrêtera, vous devrez me donner votre réponse. Combien y a-t-il de billes noires dans la bouteille ? ».

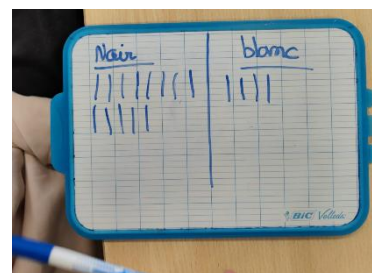
La consigne est résumée au tableau : « 4 billes. Combien de billes noires ? »

Temps 2 – Mise en activité des élèves (15 min)

Par binôme (5 min) : expérimentation

Chaque binôme dispose d'une bouteille similaire à la bouteille B ou à la bouteille C.

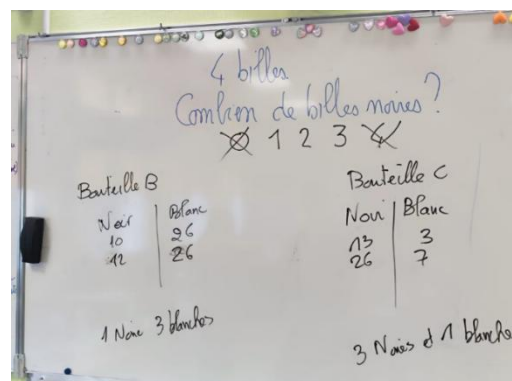
Les élèves sont autonomes dans leur organisation de consignation des résultats des tirages, le professeur peut les guider vers la réalisation de tableaux comme ceux-ci-contre :



Mise en commun (10 min) : hypothèses quant au contenu des bouteilles puis dévoilement du contenu.

Une fois que les élèves ont émis des hypothèses, ils vérifient que celles-ci correspondent au contenu de leurs bouteilles qui est alors dévoilé à la classe et noté au tableau sous forme d'une phrase ou d'un dessin.

L'appui sur le raisonnement et la verbalisation apporte une justification. L'apparition d'une bille noire et d'une bille blanche lors des tirages permet d'éliminer les propositions de 0 ou 4 billes noires.



¹ Il s'agit d'une approche dite « fréquentiste » du concept de probabilité (Cf. Annexe 5)

La question qui doit donc se poser aux élèves est de savoir s'il y a 1, 2 ou 3 billes noires dans leur bouteille. Sans calculer de proportion exacte, se référer aux résultats obtenus par les élèves peut permettre de trancher. Par exemple, si la couleur noire apparaît très souvent, c'est qu'il y a presque sûrement trois billes noires dans la bouteille.

Temps 3 - Institutionnalisation, retour réflexif (10 min)

Les billes sont remises dans les bouteilles qui sont refermées ou ramassées. L'attention est attirée sur l'évènement « obtenir une bille noire ».

L'objectif est d'arriver à dire :

- il y a une chance sur quatre en choisissant une bille au hasard avec la bouteille B ;
- il y a trois chances sur quatre en choisissant une bille au hasard avec la bouteille C.

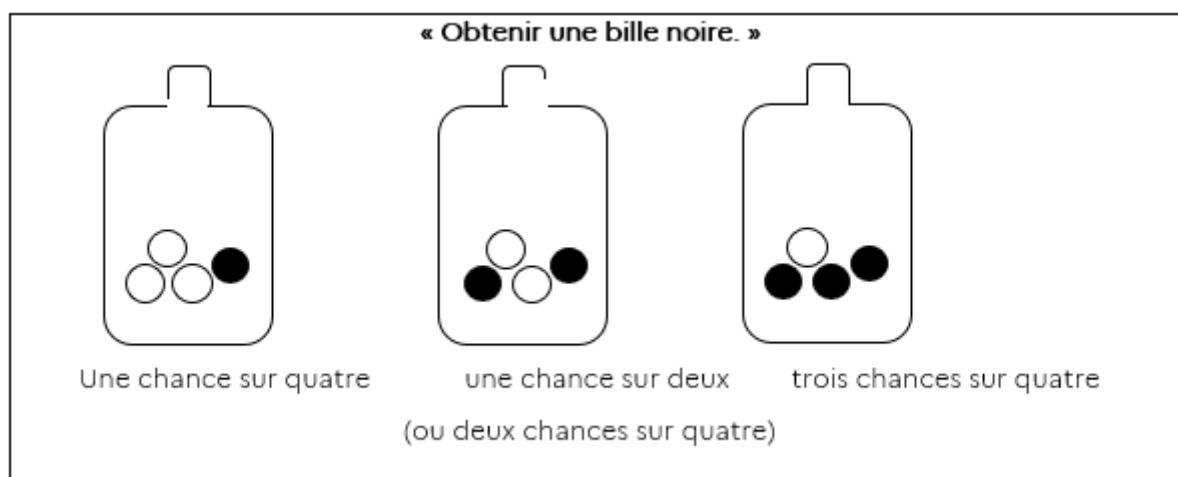
Il ne s'agit plus de réaliser l'expérience mais de déterminer des probabilités qui se justifient à l'aide de la représentation du contenu des bouteilles puis de les comparer à « une chance sur deux ».

« Une chance sur quatre », c'est moins d'une chance sur deux car moins de la moitié des billes sont noires ;

« trois chances sur quatre », c'est plus d'une chance sur deux car plus de la moitié des billes sont noires.

Les mots appris au CM1 et réactivés en amont de la séquence peuvent permettre d'atteindre l'objectif : « Pour nous, « Probable » signifiera plus d'une chance sur deux et « peu probable » moins d'une chance sur deux ».

Trace écrite possible :



Ordonner les probabilités par ordre croissant de gauche à droite rappelle la représentation sous forme d'échelle.

Le lien avec « moitié de » permet de justifier que les probabilités « deux chances sur quatre » et « une chance sur deux » sont égales.

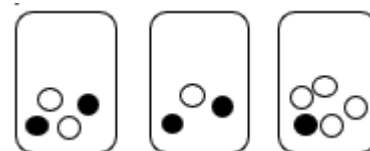
Temps 4 – Application, comparer des probabilités (15 min)

Collectif, à l'oral

De nouveaux contenus sont affichés au tableau sans ordre prédéfini, comme par exemple ceux-ci-contre. Ces représentations sont assimilées aux bouteilles.

Consigne : « Avec quelle bouteille est-il plus probable d'obtenir une bille noire ? ».

Des échanges s'engagent pour exprimer et justifier les probabilités de chacun des contenus proposés. L'objectif est dans un premier temps d'exprimer les probabilités sous la forme « a chances sur b » puis dans un second temps de les ordonner dans l'ordre croissant.



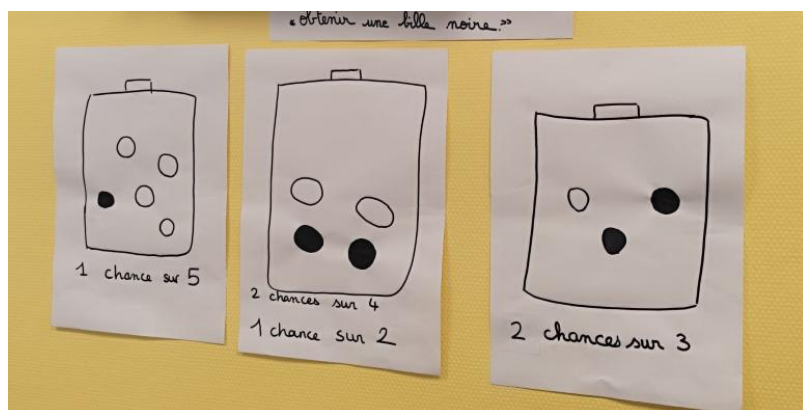
Point de vigilance pour le professeur

S'appuyer sur le contenu permet de justifier les probabilités. Par exemple, s'il y a une bille noire parmi cinq billes, la probabilité est exprimée « une chance sur cinq ».

Il est ici possible de comparer des probabilités comme « une chance sur cinq » et « deux chances sur trois » en faisant remarquer que « deux chances sur trois » signifie que plus de la moitié des billes sont noires, alors qu'« une chance sur cinq » signifie que moins de la moitié des billes sont noires.

La réalisation de l'expérience peut aussi être évoquée pour expliquer qu'en retournant plusieurs fois les bouteilles, une bille noire apparaîtra par exemple plus souvent dans le cas où il y a deux billes noires parmi trois que dans le cas où il y a deux billes parmi quatre.

Trace écrite ou affichage possible :



Séance 2, en lien avec la séance 3 : entraînement

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite

Dans cette séance à reproduire plusieurs fois, il s'agit d'exprimer des probabilités sous la forme « a chances sur b » dans des situations similaires puis d'autres situations classiques (lancer de dés, etc.). La justification des résultats, en particulier à l'oral, permet d'avoir un retour sur le niveau de compréhension des élèves.

Temps 2 – Mise en activité des élèves

Collectif à l'oral

La trace écrite de la séance 1 est accessible aux élèves.

Le professeur présente successivement quelques cartes (en les vidéoprojetant ou avec des reproductions agrandies) qui représentent des contenus de bouteilles (cf. annexe 2-C), rappelle l'expérience et demande de déterminer la probabilité de l'évènement indiqué. Les élèves écrivent leur réponse sur l'ardoise qu'ils présentent à l'enseignant à son signal.

Un élève est ensuite invité à apporter une justification orale qui s'appuie sur le contenu de la bouteille (« il y a deux chances sur cinq d'obtenir une bille bleue, car il y a deux billes bleues et cinq en tout », « il y a une chance sur deux d'obtenir une bille verte, car la moitié des billes sont vertes », etc.)

Lors d'autres séances, le professeur présente des séries d'évènements issus d'autres contextes, comme par exemple le lancer d'un dé à six faces ou le tirage dans un jeu de cartes (cf. annexe 2-A et annexe 2-B).

Point de vigilance à destination du professeur

Dans tous les contextes, l'expérience aléatoire doit être préalablement explicitée et les issues exhibées. Par exemple pour un jeu de cartes à jouer, il faut indiquer le nombre de cartes dans le jeu, les différentes valeurs et couleurs possibles, indiquer que l'on choisit une carte au hasard sans voir sa valeur. Il est particulièrement important de s'assurer que les caractéristiques des cartes (valeurs, couleurs, figures) soient connues des élèves qui ne jouent pas nécessairement avec des jeux de 32 ou 52 cartes à la maison. Pour le lancer d'un dé à 6 faces, rappeler qu'il y a autant de chances d'obtenir n'importe laquelle des six issues.

Temps 3 – Retour réflexif

La trace écrite de la séance 1 est enrichie avec quelques nouveaux exemples abordés en les justifiant à l'oral.

Pour aller plus loin

- Pour un évènement et une probabilité donnée, on demande aux élèves de colorier une urne correspondante (cf. annexe 2-D)
- Proposer des évènements en lien avec la vie quotidienne (cf. annexe 2-E) : pour la plupart, ces évènements sont difficilement quantifiables par dénombrement des issues, mais qualifiables par les mots appris au CM1 (impossible, certain, peu probable, probable). La justification porte alors sur leur fréquence de réalisation. Ces évènements arrivent-ils souvent ? rarement ?²

Séance 3 : entraînement

Pour la séance 3, les modalités sont les mêmes mais plusieurs évènements sont proposés en même temps et les élèves doivent indiquer :

- quel est le plus probable (ou le moins probable) en justifiant sa probabilité ;
- ordonner les probabilités sur l'échelle des probabilités.

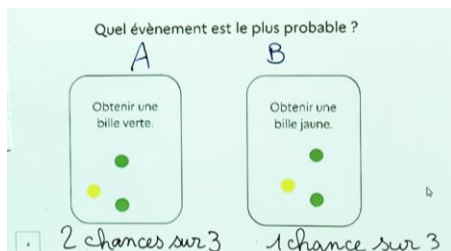
Matériel

- des cartes à projeter comme celles proposées dans l'annexe 2 ;

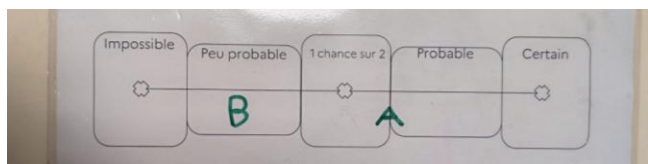
² Il s'agit d'une approche dite épistémique, ou subjective. La probabilité est considérée comme une mesure du degré de croyance ou de confiance qu'un individu accorde à la réalisation d'un évènement (Cf. Annexe 5)

- l'échelle des probabilités. (cf. annexe 3)

Le professeur propose dans une première partie de la séance de répondre à la question « quel évènement est le plus probable ? » sur plusieurs exemples qui sont justifiés oralement.



Au cours de la séance, l'échelle est distribuée aux élèves et projetée ou affichée au tableau. Après s'être assuré de sa bonne compréhension, le professeur propose d'autres exemples. Les élèves placent les probabilités sur l'échelle puis concluent sur l'évènement le plus probable.



La comparaison des probabilités peut ici s'effectuer :

- dans les cas où le nombre d'issues est le même comme par exemple « une chance sur six » et « deux chances sur six »).
- dans les cas où il est possible de se référer à la probabilité « une chance sur deux », en lien avec la notion de « moitié de ». Par exemple la probabilité « deux chances sur trois » est supérieure à « une chance sur deux » (plus de la moitié des issues réalisent l'évènement). Par analogie, puisque « deux chances sur cinq » est inférieure à « une chance sur deux », on peut affirmer que la probabilité « deux chances sur trois » est supérieure à « deux chances sur cinq ».

Et ce, même si les contextes sont différents (il est par exemple plus probable d'obtenir un nombre pair en lançant un dé à 6 faces que de tirer un as dans un jeu de 52 cartes).

En revanche, il est plus difficile à ce stade de justifier la comparaison « deux chances sur trois » et « trois chances sur quatre ».

Focus sur la séance 4 : l'arbre des possibles pour dénombrer et prévoir.

Objectifs

- Construire un arbre de dénombrement (arbre des possibles) pour recenser toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire en deux étapes indépendantes ;
- Utiliser cet arbre pour calculer des probabilités.

Matériel

Des bouteilles (cf. annexe 1) avec les contenus suivants :

- 3 billes : 1 bleue, 1 rouge, 1 verte (la bouteille D).
- 2 billes : 1 noire, 1 bleue (la bouteille E).

Temps 1 – Définition des objectifs et mise en réussite (10 min)

Collectif, à l'oral : le professeur présente les deux bouteilles et explique que l'expérience diffère de celles des séances précédentes. Il secoue les deux bouteilles et effectue un retournement simultané. Le résultat est noté au tableau, par exemple « Rouge-Vert » (RV). L'expérience est répétée en retournant d'abord une première bouteille, puis la deuxième. Le résultat est ajouté au tableau, si la combinaison obtenue est différente. Par exemple « Bleu-Bleu » (BB).

Contrairement à la séance 1, le contenu est ici rapidement explicité et vérifié en sortant les billes. « Dans la bouteille D, j'ai trois billes : une bleue, une rouge, une verte. Dans la bouteille E, j'ai deux billes : une noire, une bleue. »

Question, écrite au tableau et lue : « Quelle est la probabilité d'obtenir deux billes bleues ? »

Les échanges s'engagent, le professeur recueille les propositions ou idées et les note au tableau. Il est attendu des réponses sous la forme « a chances sur b » ou encore l'utilisation des mots « probable » ou « peu probable ». Le professeur peut effectuer encore quelques tirages pour montrer la diversité des résultats, et les écrit au tableau.

Point de vigilance à destination du professeur

Dans les réponses erronées possibles, il peut y avoir « une chance sur deux », qui reflète ici le biais d'équiprobabilité classique (soit l'évènement arrive, soit il n'arrive pas). La proposition « deux chances sur cinq » renvoie au nombre total de billes.

En réalisant quelques tirages, il est possible de constater que l'évènement « les deux billes sont bleues » ne se réalise pas souvent, et donc que la probabilité est inférieure à « une chance sur deux ».

Il est bien sûr possible que la bonne réponse soit émise (une chance sur six), la suite de la séance permet de formaliser le raisonnement.

Pour déterminer la probabilité attendue, le professeur demande alors aux élèves de déterminer toutes les issues possibles.

Consigne : « Vous allez devoir trouver toutes les combinaisons que l'on peut obtenir lorsque l'on retourne ces deux bouteilles. Cherchez un moyen de les écrire ou de les dessiner sans en oublier aucune. Certaines combinaisons sont déjà écrites au tableau ».

Temps 2 – Mise en activité des élèves (5 min)

Les élèves sont autonomes dans leur recherche à l'aide d'un cahier ou sur une ardoise.

- Procédures attendues : principalement des listes de combinaisons comme celles écrites au tableau (VN, RB, ...), mais aussi des tableaux à double entrée, ou encore dessins.
- Difficultés prévisibles : oubli de combinaisons, doublons, difficulté à organiser les résultats (mélanger les couleurs des deux bouteilles).

Temps 3 – Institutionnalisation, retour réflexif (20 min)

Les élèves sont interrogés sur le nombre de solutions trouvées (4 ? 5 ? 6 ?). Le désaccord valide le besoin d'une méthode rigoureuse.

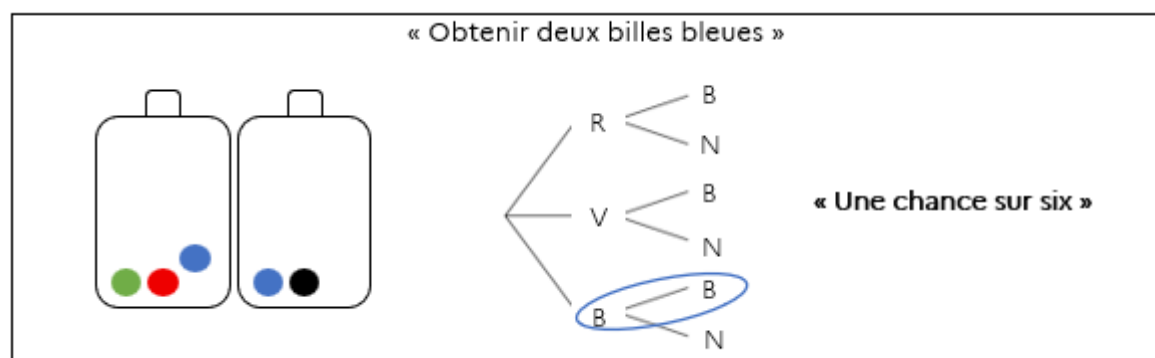
Construction de l'arbre au tableau : le professeur présente l'arbre comme un moyen de raconter l'histoire de l'expérience étape par étape.

- Étape 1 (la Bouteille D) : « Qu'est-ce qui peut sortir de la première bouteille ? ». Le professeur trace 3 branches partant d'un point unique : une vers « B » (Bleu), une vers « R » (Rouge), une vers « V » (Vert).
- Étape 2 (la Bouteille E) : « Imaginons que la bille bleue soit sortie. Que peut-il sortir de la deuxième bouteille ? ». Le professeur trace deux branches partant du « B » : une vers « N » (Noir), une vers « V » (Vert).
- Étape 3 (la bouteille E) : « Et si c'était la bille rouge qui était sortie au début ? Est-ce que cela change le contenu de la deuxième bouteille ? ». La réponse est non car les étapes sont indépendantes (le résultat de la deuxième bouteille ne dépend pas de celui de la première). On trace donc à nouveau les deux branches (« N » et « V ») au bout du « R », puis la même chose au bout du « V ».

La question initiale est reprise : « Quelle est la probabilité d'obtenir deux billes bleues ? ».

Le professeur montre les 6 chemins possibles dans l'arbre, puis entoure le chemin correspondant à l'évènement « obtenir deux bille bleues » (BB). Chaque chemin a la même probabilité de réalisation, il y a donc une chance sur six d'obtenir deux billes bleues.

Proposition de trace écrite :



Plusieurs arbres modélisent cette expérience aléatoire. Il est possible de tracer l'arbre en commençant par la bouteille qui contient deux billes. Il y a alors deux branches, puis à partir de chacune d'entre elles, trois branches qui indiquent les couleurs des trois billes possibles de l'autre bouteille. Le nombre de chemins de l'arbre est identique, il y en a six (deux multiplié par trois).

Une autre représentation est celle du tableau à double entrée. Si cette proposition émerge, elle est validée par le professeur et peut être sujet d'étude pour une autre séance.

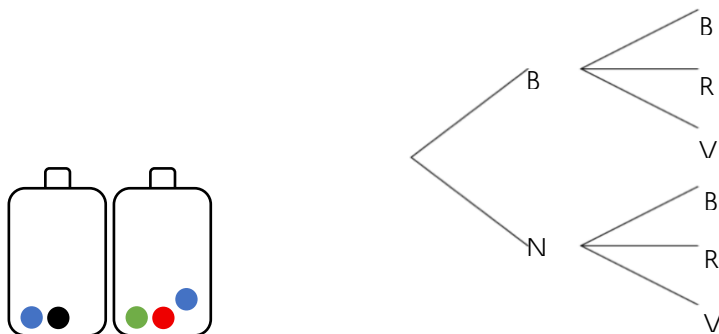
Le résultat de la deuxième étape ne dépend pas de celui de la première. L'indépendance est ici matérialisée par le fait que les deux bouteilles sont distinctes. Par la suite, on utilise progressivement deux bouteilles avec le même contenu, une même bouteille que l'on retourne deux fois.

A l'instar de certaines situations proposées en mathématiques au cycles 1, 2 et 3, comme par exemple le nombre de tenues possibles avec deux pantalons et trois chemises, le concept sous-jacent est celui de produit cartésien. Le nombre de tenues possibles est obtenu en effectuant le produit du nombre de pantalons par celui des chemises, ce qui peut par ailleurs se représenter par un arbre ou à l'aide d'un tableau.

Pour conclure cette phase, le professeur demande le calcul de la probabilité d'un autre évènement, par exemple « Obtenir exactement une bille bleue parmi les deux ». Les combinaisons à entourer sont RB, VB, BN. Il y a trois chances sur six (ou une chance sur deux) de réaliser cet évènement.

Temps 4 – Faire construire un arbre (10 min)

À partir de la même situation, le professeur demande aux élèves de construire un arbre sur leur cahier en commençant par la bouteille avec deux billes. Les représentations des bouteilles sont affichées ou dessinées au tableau dans cet ordre :



Il demande ensuite de retrouver les probabilités précédemment calculées ou en propose d'autres.

Ce temps permet de lever et de remédier aux difficultés rencontrées par les élèves :

Difficultés de conception : les billes de la deuxième bouteille (ici B, R, V) ne sont écrites qu'une fois.

Difficultés de lecture : les élèves entourent des billes situées dans la même bouteille.

Le professeur insiste sur les étapes de réalisation, fait tracer au fur et à mesure, identifie les bouteilles (en les numérotant par exemple), associe les lettres aux billes (le B de la bille bleue dans la première bouteille est distingué du B de la bille dans la deuxième bouteille). Pour identifier la combinaison associée à un chemin entouré (par exemple N-B, le professeur peut cacher les autres billes sur les représentations des bouteilles).

Séance 5 et 6 : utiliser un arbre de dénombrement.

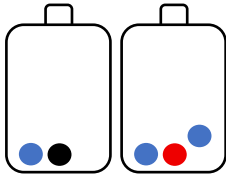
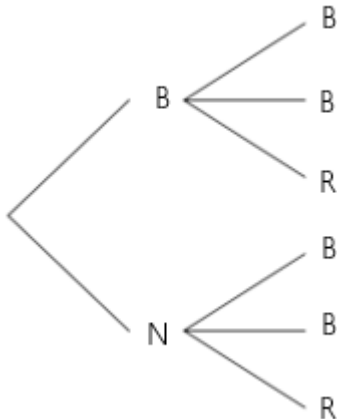
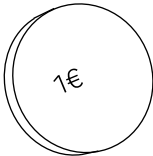
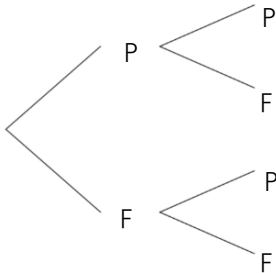
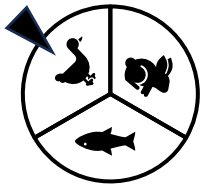
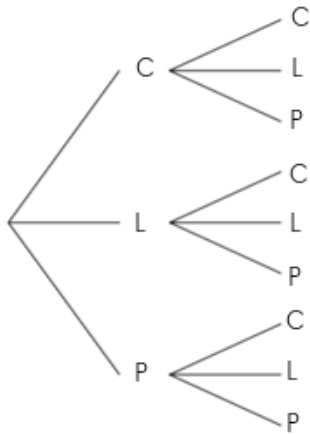
Ces séances reproductibles permettent aux élèves de mettre en application la construction et l'utilisation d'arbres en faisant varier les contextes, le nombre de branches dessinées (qui doit néanmoins rester raisonnable) et le nombre de chemins considérés.

L'objectif est aussi de comprendre la notion d'indépendance lors de la répétition d'une même expérience aléatoire en amenant les élèves à la modéliser avec le même outil.

Séance 5 : les situations passent progressivement de deux bouteilles avec des contenus différents à deux bouteilles identiques puis deux fois la même bouteille.

Séance 6 : les situations prennent appui sur d'autres contextes.

Exemples de situations (cf. annexe 4) :

Expérience aléatoire	Un arbre possible	Exemples d'évènements et leurs probabilités
Bouteilles /urnes 		Obtenir Rouge et Noir (1 chance sur 6) Obtenir la bille noire (3 chances sur 6, donc 1 chance sur 2) Obtenir deux billes noires (impossible) Obtenir au moins une bille bleue (5 chances sur 6)
On lance une pièce de monnaie équilibrée deux fois de suite. 		Obtenir deux fois pile (1 chance sur 4) Obtenir au moins une fois face (3 chances sur 4) Exactement une fois face (1 chance sur 2)
On fait tourner une roue avec des secteurs de même aire deux fois de suite. 		Obtenir un canard et un lapin (2 chances sur 9) Obtenir deux fois le même animal (3 chances sur 9) Obtenir deux animaux différents (6 chances sur 9) Obtenir au moins une fois le poisson (5 chances sur 9) Obtenir exactement une fois le lapin (4 chances sur 9)

Déroulement indicatif

La trace écrite de la séance 4 est accessible aux élèves. Sur un principe analogue aux séances 2 et 3, le professeur affiche ou projette une expérience aléatoire à deux étapes modélisables par un arbre que les élèves doivent construire puis utiliser pour calculer la probabilité d'un évènement. Plusieurs évènements sont ensuite successivement proposés pour exploiter un même arbre. Ici encore, la place de la verbalisation pour justifier la réponse est importante. Une ou deux expériences aléatoires sont ainsi présentées.

Points de vigilance à destination du professeur

La tâche demandée aux élèves est plus complexe que celle proposée aux séances 2 et 3. Il est nécessaire de leur laisser suffisamment de temps d'analyser la situation, de dessiner l'arbre, dénombrer le nombre total de chemins puis ceux qui réalisent l'évènement et enfin proposer une réponse sous la forme « a chances sur b ».

Si le nombre d'issues est important comme par exemple dans un jeu de cartes ou même lors de lancers de plusieurs dés, l'arbre n'est pas réalisable dans un temps raisonnable.

Pour aller plus loin

Le professeur propose des expériences contenant 3 étapes ou répétitions (lancer trois fois une pièce de monnaie, utiliser trois bouteilles, ...). L'arbre montre alors sa plus-value par rapport aux autres représentations comme le tableau à double entrée ou l'écriture de listes exhaustives.

Bibliographie

Briand, J. (2005). Une expérience statistique et une approche des lois du hasard au lycée par une confrontation avec une machine simple. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, pp. 247-282.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of mathematical behavior of children* N°20, pp. 363-411.

Gauvrit, N., & K, M. (2014). The equiprobability bias from a mathematical and psychological perspective. *Adv Cogn Psychol*, 119-30.

Glaymann, M. (1976). Les Probabilités à L'école Élémentaire. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 6, no. 4, 1976, pp. 389-93. , pp. 389-393. .

Martin, V., Thibault, M., & Theis, L. (2019). *Enseigner les premiers concepts de probabilités : Un monde de possibilités !* Presses de l'Université du Québec.

Parzysz, B. (1990). Un outil sous estimé : l'arbre probabiliste. *Bulletin APMEP* n°372, pp. 47-52.

Pichard, J.-F. (1998). Approche épistémologique et diverses conceptions de la probabilité. *Repères -IREM* n°32.

Verdier, J. (2009). Le hasard au collège. *Bulletin APMEP* n° 484, pp. 615-626.